Lycée Georges Clemenceau

Année 2024/2025

Livret de travail 2nde→1 ère

Ce livret s'adresse aux élèves qui s'apprêtent à entrer en classe de Première. Il a pour but de proposer une sélection d'exercices couvrant une large partie des enseignements de Seconde et qui ont été choisis pour vous permettre de faire le point sur les connaissances et les techniques nécessaires à une arrivée en Première dans de bonnes conditions.

Les exercices présentent un pictogramme donnant une indication du niveau de difficulté : de ★ pour tous les élèves (y compris tronc commun et stmg) jusqu'à ★★★★ (à partir de ★★ seulement pour ceux qui désirent se préparer à la spécialité Mathématiques).

En STMG, il n'y aura plus de géométrie : la partie vecteurs et géométrie est donc pour les autres élèves.

En ce qui concerne l'algorithmique et la programmation, le site python.dellasantina.corsica permet de retravailler les notions vues et à savoir.

Ce livret est une base intéressante de travail pour tous. C'est dans ce but que nous vous le proposons, pour que vous puissiez travailler régulièrement pendant les vacances et être prêts pour la rentrée prochaine.

PS : En spécialité, une interrogation sera faite la semaine de la rentrée avec des exercices de ce livret.

Bonnes vacances quand même !

Exercices

I Calcul numérique

Ex 1 Le ballon de foot

Un ballon de football est formé de 12 pentagones réguliers et de 20 hexagones réguliers assemblés entre eux par une couture.
Leurs côtés mesurent 4,5 cm.

Trouver la longueur de la couture.

Ex 2

Calculer et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{3 - \frac{2}{5} + \frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}}$$

$$B = \frac{6 - \frac{5}{2} + \frac{3}{8}}{3 - \frac{5}{2} - \frac{7}{4}}$$

$$C = \frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \times \frac{\frac{5}{6} + \frac{7}{3}}{1 - \frac{5}{6}} \times \frac{-\frac{2}{5} + 1}{\frac{2}{5} - 1}$$

$$D = \frac{\frac{5}{6} + \frac{1}{5}}{\frac{5}{6} - \frac{1}{5}} \times \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}} \times \frac{\frac{1}{4} - 5}{1 + \frac{1}{4}}$$

$$E = \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3}\right) \times \frac{2 - \frac{4}{7}}{3} \times \frac{1}{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}$$

$$F = \frac{\frac{1}{2} - \frac{4}{3}}{\frac{1}{8} + \frac{3}{7}} \times \frac{\frac{2}{3} + \frac{7}{5}}{\frac{1}{12} - \frac{23}{3}}$$

Ex 3

Calculer les expressions suivantes en donnant les résultats sous forme de fractions irréductibles :

$$A = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}} \qquad C = 1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{4}}}$$

$$B = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}} \qquad D = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{1 - \cfrac{1}{2}}}}$$

Ex 4

Simplifier le produit (Les points de suspension indiquent que l'on continue le processus jusqu'au dernier terme) :

$$p = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{2020}\right)$$

Ex 5

Donner sous forme décimale :

$$A = \frac{10^4 \times 7^{-1}}{2^7 \times 7^{-3} \times 5^7}$$

$$B = \left(\frac{3^{-9} \times \left(10^{-3}\right)^{-2}}{2^{-1} \times 10^5 \times 3^{-10}}\right)^2$$

$$C = \frac{2,5^5 \times 3^{-2} \times 4^5 \times 18^3}{5^8 \times 3^{-4} \times 9^3 \times 2^8}$$

Ex 6

1) Simplifier $A = \sqrt{(3 - \pi)^2}$

2) Soit $B = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ et $C = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.

Prouver que $B = C$.

3) Soit $D = \sqrt{10 - 2\sqrt{21}}$ et $E = \sqrt{3} - \sqrt{7}$.

A-t-on $D = E$?

4) Soit $F = \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{3 + \sqrt{8}}$.

Prouver que F est un nombre entier.

Ex 7

Réduire les expressions suivantes

$A = 2\sqrt{500} - 3\sqrt{75}$
$B = \sqrt{27} + 2\sqrt{75} - \sqrt{108}$
$C = 2\sqrt{32} + 3\sqrt{18} - 3\sqrt{50}$
$D = \sqrt{27} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{12}$
$E = -\sqrt{245} + 2\sqrt{45} + 5\sqrt{20}$
$F = \sqrt{27} + 2\sqrt{75} - \sqrt{12}$
$G = \sqrt{45} + 2\sqrt{125} - \sqrt{80}$
$H = \sqrt{150} + \sqrt{96} - 4\sqrt{24}$
$I = 3\sqrt{27} + 4\sqrt{300} - 5\sqrt{3}$
$J = \sqrt{80} - 2\sqrt{320} - 5\sqrt{45} + \sqrt{180} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{125}$

Ex 8

Transformer chacune des expressions suivantes pour qu'il n'y ait plus de radical (ou racine carrée) au dénominateur

$$A = \frac{5}{\sqrt{6} - 1} \qquad K = \frac{1 + \sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

$$F = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \qquad L = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

$$I = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \qquad M = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$$

$$J = \frac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \qquad N = \frac{1 + \sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{3}}$$

Ex 9 ☆☆★★

On pose $B(n) = \dfrac{(8^{n+1} + 8^n)^2}{(4^n - 4^{n-1})^3}$.

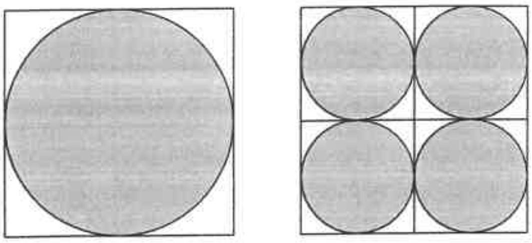
1) Calculer $B(n)$ pour $n = 0$ et $n = 1$.

2) Montrer que $B(n)$ ne dépend pas de n.

Ex 10 ☆☆★★

$\mathcal{Q}$ est un carré de 1 m de côté et $\mathcal{C}$ en est le cercle inscrit.

Si on partage $\mathcal{Q}$ en carrés plus petits et que l'on y trace leurs cercles inscrits respectifs, on obtient la figure suivante :



Augmentez, autant que vous l'imaginez, le nombre de subdivisions. L'aire de la partie grisée (celle couverte par les disques) croît-elle, décroît-elle, ou reste-t-elle toujours la même ?

Ex 11 ☆☆★★

Dans chacun des cas, déterminer la valeur de n telle que :

a)

$$\left(\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5}\right)\left(\frac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5}\right) = 2^n$$

a) $3^{2001} + 3^{2002} + 3^{2003} = n3^{2001}$

c) $(10^{2002} + 25)^2 - (10^{2002} - 25)^2 = 10^n$.

Ex 12 ☆☆★★

Sans calculer les facteurs, prouver que

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) = 2^{32} - 1.$$

II Calcul algébrique

Ex 13 ☆☆★☆

Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = (-7x+6)(-6x-8)$
$B = (-x-10)(-9x+2)$
$C = (6x+2)^2 + (9x-3)(9x+3)$
$D = (3x-6)^2 - (-4x-10)(3x+8)$
$E = -(8x+4)(3x-10) - (6x-5)(6x+5)$
$F = (6x-7)^2 + (5x+10)^2$

Ex 14 ☆☆★☆

Factoriser les expressions suivantes.

$A = 81x^2 - 4$
$B = (-x-2)(-3x-4) + (8x+4)(-3x-4)$
$C = 16 - (-8x-6)^2$
$D = (-9x+2)(7x-2) - (-9x+2)$
$E = 49x^2 - 36 + (7x+6)(5x+8)$
$F = (-5x+4)^2 - (-8x+4)(-5x+4)$

Ex 15 ☆☆★★

Si $x + \dfrac{1}{x} = 6$, déterminer $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

Ex 16 ☆☆★☆

Développer, puis réduire

$A = (2x^2 - y)^2$
$B = (3x^2 - 2y^3)(3x^2 + 2y^3)$
$C = (4abc - 5ac)^2$
$D = (12a^4 - 11ab)(11ab + 12a^4)$
$E = (3a-2)(3a+2)(9a^2+4)$
$F = (2a-3)^2(2a+3)^2$

Ex 17 ☆☆★☆

Développer, puis réduire

$A = (3x - 2y - 1)^2$
$B = (3x+y+z)(3x-y-z)$
$C = (2a^n - a^{n+1})^2$
$D = (4a^{3n} + 3a^{2n})(4a^{3n} - 3a^{2n})$
$E = \left[x^2 + (2+\sqrt{2})x + 1 + \sqrt{2}\right] \times \left[x^2 + (2-\sqrt{2})x + 1 - \sqrt{2}\right]$
$F = \left(x^2 + x\sqrt{3} + 1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2 - x\sqrt{3} + 1\right)$

Ex 18 ☆☆★★

Développer, puis réduire

$A = (3-y)^2$	$E = (xy - 4y)^2$
$B = (5-2x^2)^2$	$F = (ax+by)^2$
$C = (2ab^2 - 3c^3d^4)^2$	$G = (a+2b+3c)^2$
$D = (x+2y)^2 - 4xy$	$H = (a+2b-c)^2$

Ex 19 ☆☆★★

Factoriser au mieux.

$A = 9ab - 6a^2 + 12ab^2$
$B = a^3b^2c - a^2bc + a^5b^3c^2$
$C = 16(a-b) - x^4(a-b)$
$D = 25(x^2 - y^2) + a^2(y^2 - x^2)$
$E = 5ax - 5ay - bx + by$
$F = 4a^2(3-x) - (4a-1)(3-x)$
$G = (25a^2 + 1 - 10a) - 9a^2$
$H = (x-y)^n - 4x(x-y)^{n-1} + y(x-y)^{n-2}$

Ex 20 ★☆★★

1) Soient x et y des réels avec

$$2x + 3y = 3 \text{ et } xy = -4.$$

Déterminer $4x^2 + 9y^2$.

2) Soient x et y des réels avec

$$x - y = 3 \text{ et } xy = 4.$$

Déterminer $x^2 + y^2$.

3) Soient a et b des réels avec

$$a + b = 13 \text{ et } ab = 41$$

Calculer $a^3 + b^3$.

4) Soient x et y des réels avec

$$x + y = 4 \text{ et } xy = -3.$$

Déterminer $x^2 + y^2$ puis $x^4 + y^4$.

Ex 21 ★☆★★

Soient a et b des réels tels que

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} = 1$$

Démontrer que $a^3 + b^3 = a + b$.

Ex 22 ☆☆★★ **Formule de Héron**

La formule de Héron permet de calculer l'aire d'un triangle connaissant ces trois côtés.
Si les longueurs des côtés sont a, b, c alors en appelant p le demi-périmètre du triangle et S l'aire du triangle, on a

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Pour la démonstration, on considère un triangle ABC, de hauteur AH, tel que $\widehat{BAC}$ soit un angle aigu. On appelle :

- a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, AC et AB ;
- h_a la hauteur AH ;
- x la longueur HC.

1) Exprimer S en fonction de a et h_a.

2) Exprimer p en fonction de a, b et c.

3) Exprimer c^2 en fonction de a, b et x.

4) a) En déduire l'écriture de x en fonction de a, b et c.

b) En déduire l'écriture de h_a^2 en fonction de a, b et c.
Prouver que :

$$h_a^2 = \left(b - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right) \times \left(b + \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)$$

puis que

$$h_a^2 = \frac{1}{4a^2}\left(2ab - a^2 - b^2 + c^2\right)\left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right)$$

c) Factoriser $\left(2ab - a^2 - b^2 + c^2\right)$.

d) Factoriser $\left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right)$.

5) En déduire la formule de Héron.

III Algorithmique et Programmation en langage Python

Site : python.dellasantina.corsica

Aller retravailler les notions vues en seconde sur ce site pour qu'elles soient acquises pour la première.

IV (In)équations

Ex 35 ☆☆★☆ **1er degré**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du 1er degré :

1) $\dfrac{-4x-6}{3}-\dfrac{-4x-2}{6}=\dfrac{-7x-5}{2}$

2) $\dfrac{-3x+6}{8}-\dfrac{x+10}{3}=\dfrac{-5x+10}{4}$

3) $\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{4x-3}{3}=1-\dfrac{5x-12}{6}$

4) $(2x+5)^2-2(7x+4)=4(x+3)^2-1$

5) $(2x+1)^2-3(x^2-1)=(x+3)^2-5x+4$

6) $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{5x-6}{x^2-4}$

Ex 36 ☆☆★☆ **Équation produit**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations (se ramener à des équations produits) :

1) $(3x+1)(5x-3)=0$

2) $(3-x)(4-x)(10-x)=0$

3) $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2=4\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2$

4) $-x(5-x)+3(x-5)^2=x^2-25$

5) $x(x+1)(x+2)=(x+1)(x+2)(x+3)$

6) $2x(x^2+2)=x^2(x^2+2)$

Ex 37 ☆☆★☆ **carré**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $3x^2-1=0$

2) $0,04x^2=1$

3) $7x^2=\dfrac{1}{15}$

4) $(x+1)^2+(x-1)^2=6$

Ex 38 ★☆★★

Résoudre

$$\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$$

Ex 39 ☆☆★☆ **Un problème d'Euler**

Un père mourut en laissant quatre fils, ceux-ci se partagèrent ses biens de la manière suivante :

- le premier prit la moitié de la fortune moins 3 000 livres;
- le deuxième prit le tiers de la fortune moins 1 000 livres;
- le troisième prit exactement le quart de la fortune;
- le quatrième prit 600 livres plus la cinquième partie de la fortune.

1) Quelle est la fortune laissée par le père?

2) Quelle somme reçut chaque enfant?

Ex 40 ☆☆★☆

Lorsqu'on ajoute un même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\dfrac{1789}{1994}$, on obtient 2 comme résultat.

Quel est ce nombre?

Ex 41 ☆☆★☆

Où faut-il scier ce cube de 10 cm d'arête de manière à obtenir un prisme dont la base est un triangle isocèle et dont le volume est le tiers de celui du reste du cube?

Ex 42 ☆☆★☆ **Le paradoxe de la ficelle**

Si on enroulait une ficelle autour de l'équateur (environ 40 000 km) et qu'on rallongeait cette ficelle d'un mètre de façon à former une nouvelle circonférence, à quelle hauteur au-dessus du sol se trouverait-elle?

Ex 43 ★☆★★ **Solution de glucose**

Dans un certain test médical destiné à mesurer la tolérance aux hydrates de carbone, un adulte boit 7 centilitres d'une solution à 30 % de glucose. Lorsque le test est administré à un enfant, la concentration de glucose doit être ramenée à 20%.

Combien de solution à 30 % et combien d'eau devra-t- on utiliser pour préparer 7 centilitres de solution à 20 %?

Ex 44 ☆☆★☆ **2nd degré**

On se propose de résoudre l'équation :

$$x^2-x-1=0.$$

1) Démontrer que cette équation est équivalente à : $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$.

2) Résoudre alors cette dernière équation.

Cette exercice nous indique une méthode pour résoudre n'importe quelle équation du second degré...

Ex 45 ☆☆★★

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $4x^2+7x-2=0$;

2) $2x^2-3x-6=0$;

3) $(2x+3)^2=4x^2-6x+9$;

4) $x^2-3=4x^2+0,5x+1$;

5) $6x^2+18x+42=-x^2-5x+3$;

Ex 46 ★☆★★

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

Poser d'abord $X=x^2$ et résoudre en X dans un premier temps.

a) $x^4+x^2-12=0$;

b) $x^4-13x^2+36=0$;

Ex 47 ☆☆★☆

Vérifier que 4 et $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont solutions de l'équation :

$$-2x^2+x(8+\sqrt{3})-4\sqrt{3}=0$$

Ex 48 ☆☆★☆

Un sol est recouvert de 500 carreaux carrées. Si l'on avait utilisé des carreaux de 5 cm plus long et plus large, il en aurait fallu 320 pour recouvrir le sol.

Quelles sont les dimensions des premiers carreaux?

Ex 49 ☆☆★☆

Deux trains partent en même temps de deux villes A et B distantes de 360 km. Ils se rencontrent au bout de 4 heures. Pour que la rencontre se fasse à mi-distance, il aurait fallu que le train à destination de B parte 54 minutes avant l'autre.

Calculer la vitesse moyenne des deux trains.

Ex 50 ☆☆★☆

Deux voyageurs A et B distants de 66km vont l'un vers l'autre. A part trois heures après B. Après la rencontre, B met 1h 36min pour achever le trajet et A, 6h 15min.

Déterminer le point de rencontre.

Ex 51 ☆☆★☆

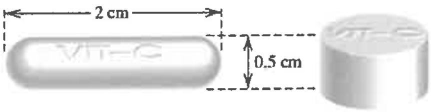
La vitesse du courant d'un fleuve est de 5km/h. Il faut à un rameur 30 minutes de plus pour parcourir 1,2km en remontant le courant que pour la même distance en descendant.
Quelle est la vitesse du canoë en eau tranquille ?

Ex 52 ★☆★★ **Dimensions d'un comprimé**

La rapidité avec laquelle un comprimé de vitamine C se dissout dépend de sa surface.
Une première sorte de comprimé a 2 centimètres de long et a la forme d'un cylindre terminé à chaque extrémité par un hémisphère de 0,5 centimètre de diamètre, comme le montre la figure.
Une seconde sorte de comprimé a la forme d'un cylindre circulaire droit de 0,5 centimètre de hauteur.

1) Calculer le diamètre du second comprimé pour que son aire soit égale à celle du premier comprimé.

2) Calculer le volume de chaque comprimé.



Ex 53 ☆☆★☆

Résoudre les systèmes

1) $\begin{cases} 5x - 6y &= 4 \\ 3x + 7y &= 8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + 8y &= 7 \\ 3x - 5y &= 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1}{3}c + \frac{1}{2}d &= 5 \\ c - \frac{2}{3}d &= -1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} &= -\frac{4}{15} \\ 5x - \frac{y}{2} &= \frac{13}{2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x + y &= 5 \\ 6x + 2y &= 5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x + y &= 5 \\ \frac{6}{4}x &= \frac{5}{2} - \frac{y}{2} \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x + 4y &= 6 \\ \frac{1}{2}x + 3y &= \frac{11}{2} \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}z &= 6 \end{cases}$

Ex 54 ☆☆★☆

Écrire les ensembles comme un intervalle ou une réunion d'intervalles.

1) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 35 < 0\}$.

2) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{x+7}{x-5} \geqslant 0\right\}$.

3) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{x+7}{x-5} \leqslant -2\right\}$.

4) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 \leqslant 0\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1-x}{x+3} \geqslant 1\right\}$

Ex 55 ☆☆★★

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $(3x+1)(-2x+5) \leqslant 0$

2) $\dfrac{3x-8}{2x+3} \leqslant 0$

3) $(x-2)(3x+5)(3-7x) < 0$

4) $\dfrac{7x-2}{4x^2-1} \leqslant 0$

5) $\dfrac{4x^3-9x}{x^2-16} \geqslant 0$

6) $(3x+2)^2 - (x-1)^2 \leqslant 0$

7) $(5x+1)^2 + 9 \leqslant 0$

8) $(3x^2+1)(9-2x) > 0$

9) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x+2} > 0$

Ex 56 ☆☆★★

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $(2x-1)^2 \leqslant 3$

2) $(x+3)^2 > 5(x+3)(x-2)$

3) $(x-1)^2(x-2) < (x^2-1)(2-x)$

4) $\dfrac{x-1}{x+1} > 2$

5) $\dfrac{3x-2}{5-3x} \geqslant 1$

6) $\dfrac{2x+1}{x+2} \geqslant x$

7) $\dfrac{5x+3}{3x+5} \leqslant \dfrac{3x+5}{5x+3}$

Ex 57 ☆☆★★

Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{n\}$, l'inéquation

$$\frac{1}{x-n} \geqslant x - n.$$

Ex 58 ★☆★★

Résoudre les inéquations :

1) $\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geqslant -x + 2$.

2) $\dfrac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} > \dfrac{1}{2}$.

3) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-5} \geqslant \sqrt{5-2x}$.

V Fonctions

Ex 59 ☆☆★☆

Donner le domaine des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} + x$

2) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$

3) $f : x \mapsto \dfrac{2x - 1}{3x + 7}$

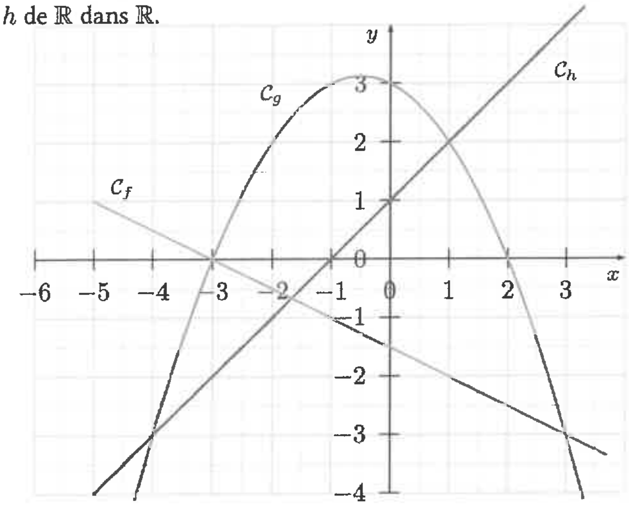
4) $f : x \mapsto \dfrac{1 - x}{\sqrt{x - 1}}$

5) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 10x + 21}$

6) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2 - x}{x + 5}}$

Ex 60 ☆☆★☆

Voici les représentations graphiques de trois fonctions f, g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.



1) Déterminer à partir de ces graphes :

$f(1)$	$f(-2)$	$f(0)$
$g(1)$	$g(-2)$	$g(0)$
$h(1)$	$h(-2)$	$h(0)$

2) « Le point $(-49; -48)$ appartient à la courbe représentative de h. » VRAI ou FAUX ?

3) Compléter

Si $f(x) = -3$, alors $x = \ldots$

Si $g(x) = 3$, alors $x = \ldots$

Si $h(x) = 0$, alors $x = \ldots$

Si $f(x) = g(2)$, alors $x = \ldots$

Si $f(x) = h(x)$, alors $x = \ldots$

Si $g(x) > f(x)$, alors $x \ldots\ldots$

Si $g(x) = h(x)$, alors $x = \ldots$

4) Sur quel ensemble f est-elle positive ?

Sur quel ensemble g est-elle négative ?

Sur quel ensemble h est-elle strictement positive ?

Ex 61 ☆☆★☆

1) Pour $x \geqslant 0$, comparer : $(x+1)^2$ et x^2 ;

2) Pour $x \leqslant 0$, comparer : $(x-4)^2$ et $(x-3)^2$;

3) Pour $x \geqslant 5$, comparer : $(x-4)^2$ et $(x-3)^2$;

Ex 62 ☆☆★☆

Donner un encadrement de x^2 lorsque :

a) $x \in [1\,;2]$; b) $x \in [3\,;7[$; c) $x \in]-4\,;-1]$;

d) $x \in]-8\,;0[$; e) $x \in [-3\,;5]$; f) $x \in \left]-\sqrt{5}\,;2\right]$.

Ex 63

À partir de la parabole représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$ dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, comment tracer aisément la courbe de :

1) $g(x) = -x^2$;

2) $h(x) = (-x)^2$;

3) $i(x) = (x+3)^2$;

4) $j(x) = (x-1)^2$;

5) $k(x) = x^2 + 7$

6) $l(x) = \dfrac{x^2}{3}$;

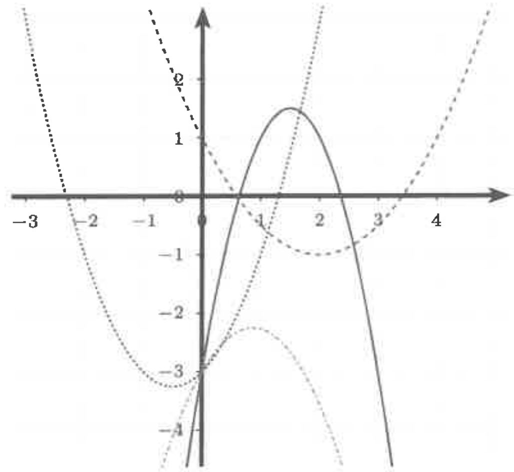
7) $m(x) = (x-2)^2 - 1$

Ex 64

Par lecture graphique, associer à chacune des fonctions ci-dessous sa courbe représentative.

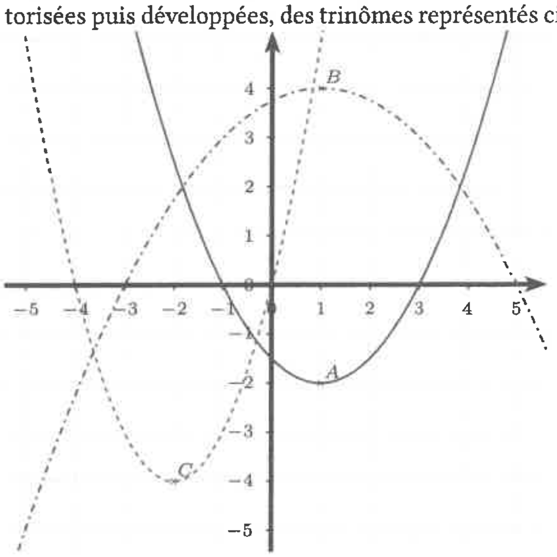
a) $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$; b) $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$;

c) $h(x) = x^2 + x - 3$; d) $k(x) = -x^2 + \sqrt{3}x - 3$.



Ex 65

À partir de lectures graphiques, déterminer les expressions factorisées puis développées, des trinômes représentés ci-dessous.

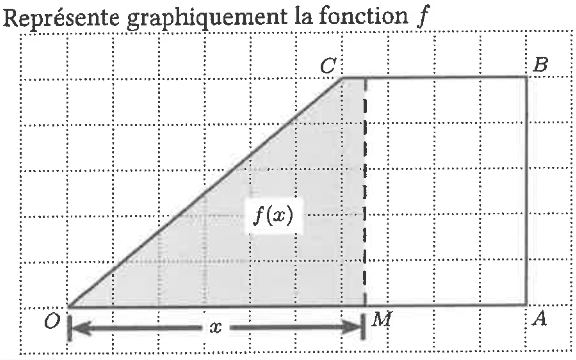


Ex 66 ☆☆★★

On considère un trapèze rectangle $OABC$ avec $OA = 10\,\text{cm}$, $AB = 5\,\text{cm}$, et $BC = 4\,\text{cm}$ (cf. figure ci-contre à l'échelle). À tout point M du segment $[OA]$, avec $OM = x$, on fait correspondre l'aire du domaine ombrée, notée $f(x)$ (exprimée en cm^2).

1) Donne une formule explicite de $f(x)$ sur chacun des intervalles $[0, 6]$ et $[6, 10]$

2) Représente graphiquement la fonction f

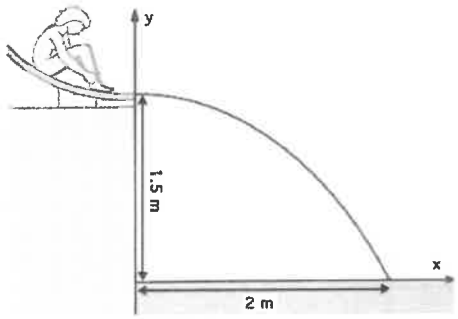


Ex 67

Une bille métallique de x cm de rayon ($0 < x < 5$) repose sur le fond d'une boîte cubique de 10 cm d'arête.
Exprimer, en fonction de x, le volume d'eau $V(x)$ que l'on doit verser dans la boîte, de façon à recouvrir exactement la bille.

Ex 68

Caroline fait du toboggan à la piscine. Arrivée au bas du toboggan, sa trajectoire dans l'air est une parabole d'équation $y = ax^2 + h$.

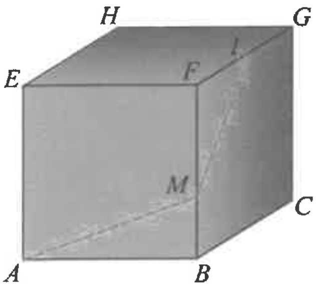


1) La fin du toboggan se situe à $1,50$ m au-dessus du niveau de l'eau et le point d'entrée dans l'eau est à 2 m du bord. Déterminer les valeurs de a et de h.

2) La valeur du paramètre a dépend de la vitesse (en m/s). On sait que $a = -\dfrac{6}{v^2}$. Quelle est la vitesse de Caroline au moment de quitter le toboggan ?

Ex 69

On considère un cube d'arête 2 cm et l'on désigne par I le milieu de $[FG]$ et par M un point quelconque du segment $[BF]$. On pose $x = BM$.

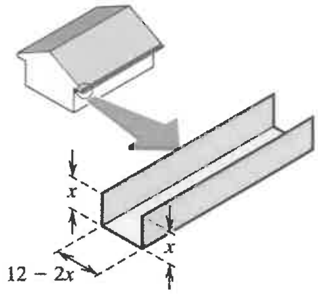


1) Exprimer, en fonction de x, la longueur du trajet « AMI » (segment AM, suivi du segment $[MI]$).

2) Trouver la valeur de x telle que la longueur de ce trajet soit minimale.

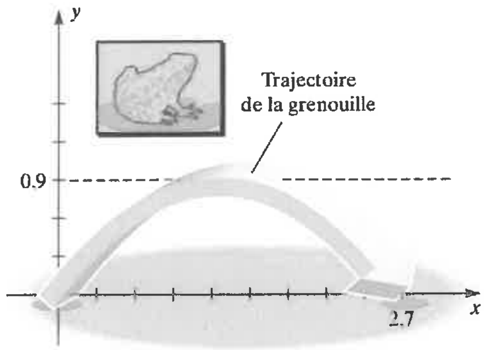
Ex 70

On veut faire une gouttière avec une longue feuille de métal de 12 cm de large en pliant les deux longs côtés et en les relevant perpendiculairement à la feuille. Quelle hauteur doivent avoir les côtés relevés pour que la gouttière ait une contenance maximale ?



Ex 71 Animaux sauteurs

Les bonds des animaux sauteurs ont typiquement des trajectoires paraboliques. La figure illustre le bond d'une grenouille superposé à un système de coordonnées. La longueur du saut est de 2,7 m, et la hauteur maximale au-dessus du sol est de 0,9 m.
Donner une équation de la trajectoire du saut de la grenouille sous forme standard.



Ex 72

Pour quelle valeur de a réel l'équation
$$|x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5| = a$$
possède une unique solution ?

Ex 73

Démontrer qu'il n'existe pas de fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement croissante qui vérifie
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x^2) - (f(x))^2 \geqslant \frac{1}{4}$$
Indication : si f existe, utiliser $x = 0$ et $x = 1$.

VI Vecteurs et géométrie repérée

Ex 74 ☆☆ ★☆

Soit un triangle ABC.

1) Placer les points D et E définis par :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

2) Montrer que les points A, D et E sont alignés.
3) Montrer que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Ex 75 ☆☆ ★☆

Dans un parallélogramme $ABCD$, on considère les points E et F définies par :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}.$$

Montrer que les points C, E et F sont alignés.

Ex 76 ☆☆ ★★

A et B sont deux points donnés. Placer le point M satisfaisant à la relation proposée après avoir déterminé le réel x tel que : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$.

1) $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$;
2) $\frac{3}{2}\overrightarrow{AM} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}$.

Ex 77 ☆☆ ★★

A, B et C sont trois points donnés. Placer le point M satisfaisant à la relation proposée après avoir déterminé les réel x et y tel que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

1) $\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$;
2) $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BC}$.

Ex 78 ☆☆ ★☆

Soit un triangle ABC. On considère les points K, L et M, milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$, P le milieu de $[LC]$ et Q le symétrique de K par rapport à B.

1) Donner les coordonnées des points P, M et Q dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2) Les points P, M et Q sont-ils alignés ?

Ex 79 ☆☆ ★☆

Soit I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$. Placer le point D tel que :$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Montrer que $ICDJ$ est un parallélogramme

Ex 80 ☆☆ ★☆

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère les points $A(-3;2)$, $B(4;-2)$ et $C(3;6)$.

1) Quelle est la nature du triangle ?
2) Déterminer les coordonnées de H milieu de $[AC]$.
3) Soit le point $K(2;1)$. Montrer qu'il appartient à la médiane issue de B.
4) Calculer l'aire du triangle ABC.

Ex 81 ☆☆ ★☆

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère les points : $A(-2;-3)$; $B(4;-1)$, $C(2;5)$.

1) Quelle est la nature du triangle ABC ?
2) Déterminer les coordonnées du point R milieu $[BC]$.
3) Soit le point E symétrique de A par rapport à R. Quelle est la nature du quadrilatère $ABEC$.
4) Déterminer les coordonnées du point F pour que le quadrilatère $BCEF$ soit un rectangle.
5) Soit K le milieu de $[AB]$ et L milieu de $[AC]$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (CK) et (BL).

Ex 82 ☆☆ ★☆

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Dans chacun des cas, étudier si le triangle ABC est isocèle, rectangle, ou rectangle isocèle.

1) $A\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)$, $B(2;-1)$, $C\left(\frac{3}{2};-\frac{8}{3}\right)$
2) $A\left(\frac{1}{2};4\right)$, $B\left(-\frac{3}{2};1\right)$, $C\left(4;-\frac{1}{2}\right)$
3) $A(2;5)$, $B(5;11)$, $C(-2;7)$.

Ex 83 ☆☆ ★☆

Le plan est rapporté à un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Dans chacun des cas, déterminer une équation de la droite Δ.

1) Δ passe par $A(\sqrt{2}-1;3)$ et $B(1;\sqrt{2})$.
2) Δ passe par $A\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{2}\right)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.
3) Δ passe par $A\,(3;-5)$ et son coefficient directeur est $m = -\frac{7}{5}$.
4) Δ passe par $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et est parallèle à la droite $\mathcal{D}$ d'équation : $3x+2y+7=0$

Ex 84 ☆☆ ★☆

Le plan est rapporté à un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On donne le vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\m\end{pmatrix}$ où m est un réel.

Dans chacun des cas suivants, déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires.

1) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\2\end{pmatrix}$
2) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$
3) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}7m\\\sqrt{2}+1\end{pmatrix}$

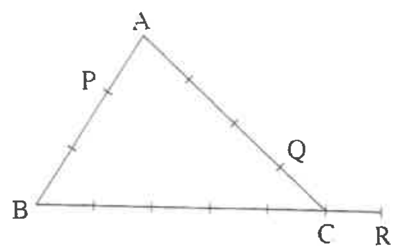
Ex 85 ☆☆ ★★

Le plan est rapporté à un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On donne les points $A(-2;1)$, $B(3;3)$ et $C(0;-1)$.

1) Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
   Calculer les coordonnées de son centre L.
2) En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABD.
3) On note E le symétrique de C par rapport à D.
   a) Calculer les coordonnées de E.
   b) Les points E, G, B sont-ils alignés ? (Justifier)

Ex 86 ☆☆ ★★

Dans la figure, les graduations sur les côtés du triangle ABC sont régulières.



1) Justifier que $(B; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$ est un repère du plan.
Déterminer les coordonnées des points P, Q et R dans ce repère.
2) Prouver que les points P, Q, R sont alignés.

Ex 87 ★★

Le plan est rapporté à un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On donne les points $A(-1;3)$, $B(3;1)$ et $C(-4;-1)$. Le point D est défini par l'égalité : $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$. On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1) Réaliser une figure et préciser la nature du quadrilatère $ABDC$.
2) Calculer les coordonnées des points D, I et J.
3) Les droites (AC) et (BD) se coupent en E.
   a) Justifier qu'il existe un réel k tel que
   $$\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}.$$
   Écrire les coordonnées de E en fonction de k.
   b) Démontrer que $k = -\frac{1}{2}$, et en déduire les coordonnées de E.
4) Déterminer une équation de la droite (AD), puis une équation de la droite (BC).
5) Les droites (AD) et (BC) se coupent en F. Calculer les coordonnées de F.
6) Prouver que les points E, I, F et J sont alignés.

Ex 88 ★★★

Le plan est rapporté à un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère les droites :
$$\Delta : y = -x + 2 \quad \text{et} \quad \mathcal{D} : 2x + y - 6 = 0.$$

1) Calculer les coordonnées du point A, point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et Δ.
2) La droite $\mathcal{D}$ coupe l'axe des abscisses en E et l'axe des ordonnées en F.
La droite Δ coupe l'axe des abscisses en B et l'axe des ordonnées en C.
Calculer les coordonnées des points E, F, B et C.
3) Calculer l'aire du quadrilatère $BCFE$, puis l'aire du triangle ABE.
4) On note H le projeté orthogonal du point C sur la droite $\mathcal{D}$.
À l'aide des résultats précédents, calculer la distance CH.