Réponses

I Calcul numérique

Ex 1

$\ell = \dfrac{12 \times 5 + 20 \times 6}{2} \times 4,5 = 405$ cm.

Ex 2

$A = \dfrac{59}{32}$ $B = -\dfrac{31}{10}$ $C = \dfrac{494}{3}$ $D = -\dfrac{31}{85}$

$E = -\dfrac{11}{21}$ $F = \dfrac{16}{39}$

Ex 3

$A = \dfrac{55}{24}$ $B = \dfrac{7}{11}$ $C = \dfrac{7}{18}$

$D = 3$

Ex 4

$$\begin{aligned} p &= \left(1-\frac{1}{2}\right) \times \left(1-\frac{1}{3}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{1}{2020}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \cdots \times \frac{2019}{2020} \\ &= \frac{1}{2020} \end{aligned}$$

Ex 5

$A = 0,049$ $B = 3600$ $C = 0,072$

Ex 6

1) $3 - \pi < 0$ donc $A = -(3-\pi) = \pi - 3$
2) $B^2 = C^2$ et $B > 0, C > 0$ donc $B = C$
3) non. $D^2 = E^2$ mais $D > 0$ et $E < 0$
4) $F < 0$ et $F^2 = 4$ donc $F = -2$

Ex 7

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{10^2 \times 5} - 3\sqrt{5^2 \times 3} \\ &= 2 \times \sqrt{100} \times \sqrt{5} - 3 \times \sqrt{25} \times \sqrt{3} \\ &= 2 \times 10 \times \sqrt{5} - 3 \times 5 \times \sqrt{3} \\ &= -15\sqrt{3} + 20\sqrt{5} \end{aligned}$$

$B = 7\sqrt{3}$ $C = 2\sqrt{2}$ $D = 11\sqrt{3}$
$E = 9\sqrt{5}$ $F = 11\sqrt{3}$ $G = 9\sqrt{5}$
$H = \sqrt{6}$ $I = 44\sqrt{3}$ $J = -28\sqrt{5}$

Ex 8

$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{\sqrt{6}-1} = \frac{5(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)} = \frac{5(\sqrt{6}+1)}{\sqrt{6}^2 - 1} \\ &= \frac{5(\sqrt{6}+1)}{5} = 1 + \sqrt{6} \end{aligned}$$

$F = \dfrac{7+\sqrt{21}}{4}$

$I = -2 + \sqrt{3}$ $J = -\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2}$

$K = \dfrac{6 - 3\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}$ $L = -5 - 2\sqrt{6}$

$M = -\dfrac{5 + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}}{3}$ $N = \dfrac{1}{2}$

Ex 9

1) $B(0) = \dfrac{(8^1+1)^2}{(1-4^{-1})^3} = \dfrac{81}{\frac{27}{64}} = 192$

$B(1) = \dfrac{(8^2+8)^2}{(4-1)^3} = \dfrac{(72)^2}{27} = 192$

2)
$$\begin{aligned} B(n) &= \frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n - 4^{n-1})^3} \\ &= \frac{81 \times 8^{2n}}{27 \times 4^{3n-3}} \\ &= \frac{3 \times 2^{6n}}{2^{6n-6}} \\ &= 3 \times 2^6 = 192 \end{aligned}$$

Ex 10

L'aire reste toujours la même.

Ex 11

1) Le produit est égal à

$$\frac{4 \times 4^5}{3 \times 3^5} \times \frac{6 \times 6^5}{2 \times 2^5} = 4 \times 4^5 = 2^{12}$$

Donc $n = 12$.

2) $3^{2001} + 3^{2002} + 3^{2003} = 3^{2001}(1 + 3 + 3^2) = (13)3^{2001}$

Donc $n = 13$.

3)
$$\begin{aligned} A &= (10^{2002}+25)^2 - (10^{2002}-25)^2 \\ &= 10^{4004} + 2 \times 25 \times 10^{2002} + 25^2 \\ &\quad -(10^{4004} - 2 \times 25 \times 10^{2002} + 25^2) \\ &= 4 \times 25 \times 10^{2002} \\ &= 100 \times 10^{2002} = 10^{2004}, \end{aligned}$$

Donc $n = 2004$.

Ex 12

Multiplier par $1 = 2 - 1$,

$$\begin{aligned} A &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= (2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= (2^{16}-1)(2^{16}+1) \\ &= 2^{32}-1 \end{aligned}$$

II Calcul algébrique

Ex 13

$$\begin{aligned} A &= (-7x+6)(-6x-8) \\ &= 42x^2+56x-36x-48 \\ &= 42x^2+20x-48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (-x-10)(-9x+2) \\ &= 9x^2-2x+90x-20 \\ &= 9x^2+88x-20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (6x+2)^2+(9x-3)(9x+3) \\ &= (6x)^2+2\times 6x\times 2+2^2+((9x)^2-3^2) \\ &= 36x^2+24x+4+81x^2-9 \\ &= 117x^2+24x-5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (3x-6)^2-(-4x-10)(3x+8) \\ &= (3x)^2-2\times 3x\times 6+6^2-(-12x^2-32x-30x-80) \\ &= 9x^2-36x+36-(-12x^2-62x-80) \\ &= 9x^2-36x+36+12x^2+62x+80 \\ &= 21x^2+26x+116 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= -(8x+4)(3x-10)-(6x-5)(6x+5) \\ &= -(24x^2+(-80x)+12x+(-40))-((6x)^2-5^2) \\ &= -(24x^2-68x-40)-(36x^2-25) \\ &= -24x^2+68x+40-36x^2+25 \\ &= -60x^2+68x+65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= (6x-7)^2+(5x+10)^2 \\ &= (6x)^2-2\times 6x\times 7+7^2+((5x)^2+2\times 5x\times 10+10^2) \\ &= 36x^2-84x+49+25x^2+100x+100 \\ &= 61x^2+16x+149 \end{aligned}$$

Ex 14

$$\begin{aligned} A &= 81x^2-4 \\ &= (9x)^2-2^2 \\ &= (9x-2)(9x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (-x-2)(-3x-4)+(8x+4)(-3x-4) \\ &= (-3x-4)(-x-2+8x+4) \\ &= (-3x-4)(7x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 16-(-8x-6)^2 \\ &= 4^2-(-8x-6)^2 \\ &= (4-8x-6)(4-(-8x-6)) \\ &= (4-8x-6)(4+8x+6) \\ &= (-8x-2)(8x+10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (-9x+2)(7x-2)-(-9x+2) \\ &= (-9x+2)(7x-2)-(-9x+2)\times 1 \\ &= (-9x+2)(7x-2-1) \\ &= (-9x+2)(7x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 49x^2-36+(7x+6)(5x+8) \\ &= (7x)^2-6^2+(7x+6)(5x+8) \\ &= (7x+6)(7x-6)+(7x+6)(5x+8) \\ &= (7x+6)(7x-6+5x+8) \\ &= (7x+6)(12x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= (-5x+4)^2-(-8x+4)(-5x+4) \\ &= (-5x+4)(-5x+4-(-8x+4)) \\ &= (-5x+4)(-5x+4+8x-4) \\ &= (-5x+4)\times 3x \end{aligned}$$

Ex 15

En élevant au carré : $36 = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$

D'où $x^2+\dfrac{1}{x^2} = 36-2 = 34$.

Ex 16

$A = 4x^4-4x^2y+y^2$

$B = 9x^4-4y^6$

$C = 16a^2b^2c^2-40a^2bc^2+25a^2c^2$

$D = 144a^8-121a^2b^2$

$E = 81a^4-16$

$F = 16a^4-72a^2+81$

Ex 17

$A = 9x^2+4y^2-12xy+4y-6x+1$

$B = 9x^2-y^2-z^2-2yz$

$C = 4a^{2n}-4a^{2n+1}+a^{2n+2}$

$D = 16a^{6n}-9a^{4n}$

$E = x^4+4x^3+4x^2-1$

$F = x^6 + 1$

Ex 18

$A = 9 - 6y + y^2$

$B = 25 - 20x^2 + 4x^4$

$C = 4a^2b^4 - 12ab^2c^3d^4 + 9c^6d^8$

$D = x^2 + 4y^2$

$E = x^2y^2 - 8xy^2 + 16y^2$

$F = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$

$G = a^2 + 4ab + 6ac + 4b^2 + 12bc + 9c^2$

$H = a^2 + 4ab - 2ac + 4b^2 - 4bc + c^2$

Ex 19

$A = 3a(4b^2 + 3b - 2a)$

$B = a^2bc(a^3b^2c + ab - 1)$

$C = (b-a)(x-2)(x+2)(x^2+4)$

$D = (a-5)(a+5)(y-x)(y+x)$

$E = (b-5a)(y-x)$

$F = (2a-1)^2(3-x)$

$G = (2a-1)(8a-1)$

$H = (x-y)^{n-2}(y^2 + 2xy + y - 3x^2)$

Ex 20

1) On a $4x^2 + 9y^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2 - 12xy$
$= (2x+3y)^2 - 12xy$
$= 3^2 - 12.(-4)$
$= 9 + 48$
$= 57.$

2) On a $9 = (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = x^2 - 8 + y^2$
Donc $x^2 + y^2 = 17$.

3) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 169$
donc $a^2 + b^2 - ab = 169 - 123 = 46$
donc $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = 13 \times 46$

4) On a $16 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 6 + y^2$
Donc $x^2 + y^2 = 22$.

On a $2x^2y^2 = 2(xy)^2 = 2(-3)^2 = 18$.
et
$484 = (x^2+y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = x^4 + 18 + y^4$
Donc $x^4 + y^4 = 466$.

Ex 21

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} = 1$$
$$\iff a(1+a) + b(1+b) = (1+a)(1+b)$$
$$\iff a^2 + b^2 = 1 + ab$$
$$\iff a^2 - ab + b^2 = 1$$

Donc en multipliant par $(a+b)$: $a^3 + b^3 = a + b$.

Ex 22

1) $S = \frac{1}{2} \times a \times h_a$.

2) $p = \frac{a+b+c}{2}$.

3) $b^2 = x^2 + c^2 - (a-x)^2 = c^2 - a^2 + 2ax$.

4) a) $x = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}$.

b) $h_a^2 = b^2 - x^2 = b^2 - \left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2a}\right)^2$

donc

$$h_a^2 = \left(b - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right) \times \left(b + \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)$$
$$h_a^2 = \left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right) \times \left(\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)$$
$$h_a^2 = \frac{1}{4a^2}\left(2ab - a^2 - b^2 + c^2\right)\left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right)$$

c) $(2ab - a^2 - b^2 + c^2) = (c - b + a)(c + b - a)$.

d) $(2ab + a^2 + b^2 - c^2) = (a + b - c)(a + b + c)$.

5)
$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{a^2}{4}h_a^2 \\ &= \frac{(c-b+a)(c+b-a)(a+b-c)(a+b+c)}{16} \\ &= \frac{(c-b+a)}{2}\frac{c+b-a)}{2}\frac{(a+b-c)}{2}\frac{(a+b+c)}{2} \\ &= (p-b)(p-a)(p-c)p \end{aligned}$$

D'où

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

III Algorithmique et Programmation en langage Python

Site : python.dellasantina.corsica

Aller retravailler les notions vues en seconde sur ce site pour qu'elles soient acquises pour la première.

IV (In)équations

Ex 35

1)

$$\begin{aligned}
& \frac{-4x-6}{3}-\frac{-4x-2}{6}=\frac{-7x-5}{2}\\
\iff & \frac{(-4x-6)\times 2}{3\times 2}-\frac{-4x-2}{6}=\frac{(-7x-5)\times 3}{2\times 3}\\
\iff & \frac{-8x-12-(-4x-2)}{\cancel{6}}=\frac{-21x-15}{\cancel{6}}\\
\iff & -8x-12+4x+2=-21x-15\\
\iff & -4x-10=-21x-15\\
\iff & -4x+21x=-15+10\\
\iff & 17x=-5\\
\iff & x=\frac{-5}{17}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La solution de cette équation est } \frac{-5}{17}.}$

2)

$$\begin{aligned}
& \frac{-3x+6}{8}-\frac{x+10}{3}=\frac{-5x+10}{4}\\
\iff & \frac{(-3x+6)\times 3}{8\times 3}-\frac{(x+10)\times 8}{3\times 8}=\frac{(-5x+10)\times 6}{4\times 6}\\
\iff & \frac{-9x+18-(8x+80)}{\cancel{24}}=\frac{-30x+60}{\cancel{24}}\\
\iff & -9x+18-8x-80=-30x+60\\
\iff & -17x-62=-30x+60\\
\iff & -17x+30x=60+62\\
\iff & 13x=122\\
\iff & x=\frac{122}{13}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La solution de cette équation est } \frac{122}{13}.}$

3) On obtient une égalité de la forme : $0x=\frac{1}{2}$, donc cette équation n'a pas de solution.

4)

$$\begin{aligned}
& (2x+5)^2-2(7x+4)=4(x+3)^2-1\\
\iff & 4x^2+6x+17=4x^2+24x+35\\
\iff & -18x=18\\
\iff & x=-1
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}=\{-1\}$

5) $\mathcal{S}=\{3\}$

6) Domaine de résolution : $\mathcal{D}_R=\mathbb{R}-\{-2;2\}$
Pour tout $x\in\mathcal{D}_R$ on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{5x-6}{x^2-4}\\
\iff & \frac{4x-8}{(x+2)(x-2)}+\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}=\frac{5x-6}{x^2-4}\\
\iff & \frac{4x-8+x+2}{x^2-4}=\frac{5x-6}{x^2-4}\\
\iff & \frac{5x-6}{x^2-4}=\frac{5x-6}{x^2-4}
\end{aligned}$$

Cette égalité est vraie pour tous les x de $\mathcal{D}_R$, donc $\mathcal{S}=\mathbb{R}-\{-2;2\}$.

Ex 36

1) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{3};\frac{3}{5}\right\}$

2) $\mathcal{S}=\{3;4;10\}$

3)

$$\begin{aligned}
& \left(x+\frac{1}{3}\right)^2=4\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\\
\iff & \left(x+\frac{1}{3}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=0\\
\iff & \left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(2\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)^2=0\\
\iff & \left(\left(x+\frac{1}{3}\right)-2\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)+2\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)=0\\
\iff & (-x+1)\left(3x-\frac{1}{3}\right)=0
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{9};1\right\}$

4)

$$\begin{aligned}
& -x(5-x)+3(x-5)^2 = x^2-25 \\
\iff\ & x(x-5)+3(x-5)^2 = x^2-25 \\
\iff\ & (x-5)(4x-15) = (x-5)(x+5) \\
\iff\ & (x-5)(4x-15)-(x-5)(x+5) = 0 \\
\iff\ & \ldots
\end{aligned}$$

$\mathcal{S} = \left\{5; \dfrac{20}{3}\right\}$

5) $\mathcal{S} = \{-2; -1\}$

6)

$$\begin{aligned}
& 2x(x^2+2) = x^2(x^2+2) \\
\iff\ & 2x(x^2+2)-x^2(x^2+2) = 0 \\
\iff\ & x(x^2+2)(2-x) = 0 \\
\iff\ & \ldots
\end{aligned}$$

$\mathcal{S} = \{0; 2\}$

Ex 37

1)

$$\begin{aligned}
& 3x^2-1 = 0 \\
\iff\ & \left(x\sqrt{3}-1\right)\left(x\sqrt{3}+1\right) = 0 \\
\iff\ & x\sqrt{3}-1 = 0 \quad \text{ou} \quad x\sqrt{3}+1 = 0
\end{aligned}$$

$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ ou $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

2) $0,04x^2 = 1 \iff 0,04x^2-1 = 0$
$\mathcal{S} = \{-5; 5\}$

3) $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\sqrt{105}}{105}; \dfrac{\sqrt{105}}{105}\right\}$

4)

$$\begin{aligned}
& (x+1)^2+(x-1)^2 = 6 \\
\iff\ & 2x^2-4 = 0 \\
\iff\ & \ldots
\end{aligned}$$

$\mathcal{S} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

Ex 38

$\mathcal{S} = \{2\}$

Ex 39

1) En posant x la fortune, on a :
$\frac{x}{2} - 3\,000 + \frac{x}{3} - 1\,000 + \frac{x}{4} + 600 + \frac{x}{5} = x$
On trouve $x = 12\,000$.

2) Chaque enfant touche 3 000 livres.

Ex 40

On ajoute -2199 au numérateur et au dénominateur.

Ex 41

Le prisme est nécessairement à base triangle *rectangle* isocèle. Sa base doit avoir une surface de 25 cm^2. On scie donc à une distance de $\sqrt{50}$ cm d'un sommet sur deux arêtes horizontales consécutives.

Ex 42

La ficelle se trouverait à $\dfrac{1}{2\pi}$ m ≈ 16 cm d'altitude.

Ex 43

Il faut mélanger $\dfrac{14}{3} \approx 47$ mL de solution dosée à 30 %, que l'on complète avec $\dfrac{7}{3} \approx 23$ mL d'eau.

Ex 44

1)

$$\begin{aligned}
& x^2-x-1 = 0 \\
\iff\ & x^2 - 2\times\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 = 0 \\
\iff\ & \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \\
\iff\ & \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
& x^2-x-1 = 0 \\
\iff\ & \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \\
\iff\ & x-\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x-\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \\
\iff\ & x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Ex 45

1) deux solutions $x = -2$ et $x = \frac{1}{4}$.

2) deux solutions $x = \dfrac{3-\sqrt{57}}{4}$ et $x = \dfrac{3+\sqrt{57}}{4}$.

3) $x = 0$ unique solution.

4) Pas de solution dans $\mathbb{R}$ (discriminant négatif).

5) Pas de solution dans $\mathbb{R}$ (discriminant négatif).

Ex 46

a) L'équation $X^2+X-12 = 0$ admet deux solutions $X = -4$ et $X = 3$.
Or $X = x^2$ donc l'équation de départ admet seulement deux solutions qui sont $x = \sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$.

b) L'équation $X^2-13X+36 = 0$ admet deux solutions $X = 4$ et $X = 9$.
Or $X = x^2$ donc l'équation de départ admet quatre solutions qui sont les éléments de $\{-3; -2; 2; 3\}$.

Ex 47

Faire le calcul.

Ex 48

$500x^2 = 320(x+5)^2 \iff 5x = \pm 4(x+5)$.
Les dimensions des premiers carreaux sont de 20cm×20cm.

Ex 49

$v_A + v_B = 90$ km/h et
$\dfrac{180}{v_A} = \dfrac{180}{90-v_A} + 0,9 \iff v_A^2 - 490v_A + 18\,000 = 0$
Le train partant de A fait 40km/h et celui partant de B, 50km/h.

Ex 50

Soit x, la distance séparant A du point de rencontre. Alors on a
$\dfrac{x}{v_A} = \dfrac{66-x}{v_B} - 3, \quad v_A = \dfrac{66-x}{6,25} \quad \text{et} \quad V_B = \dfrac{x}{1,6}$
d'où
$\dfrac{6,25x}{66-x} = \dfrac{1,6\cdot(66-x)}{x} - 3$
$\iff 1,65x^2 + 409,2x - 6\,969,6 = 0$
Le point de rencontre se trouve à 16 km de A.

Ex 51

$$\frac{1,2}{v-5}=\frac{1,2}{v+5}+\frac{1}{2}$$

La vitesse du canoë en eau tranquille est de 7 km/h.

Ex 52

1) Le rayon du second comprimé doit être de $\frac{\sqrt{13}-1}{4}\approx 0,65$ cm.

2) $V_1=\frac{5\pi}{12}$ et $V_2=\frac{7-\sqrt{13}}{16}$ en cm^3.

Ex 53

1) $\{(\frac{76}{53};\frac{28}{53})\}$
2) $\{(\frac{67}{34};\frac{13}{34})\}$
3) $\{(\frac{51}{13};\frac{96}{13})\}$
4) $\{(\frac{8}{7};-\frac{3\sqrt{6}}{7})\}$
5) $\{(1;-3)\}$
6) $\emptyset$
7) $\{(x;y)|y=-3x+5\}$
8) $\{(-1;2;-3)\}$

Ex 54

1) On a $x^2+2x-35=(x-5)(x+7)$, et le tableau de signe :

$x\in$	$]-\infty;-7[$	$]-7;5[$	$]5;+\infty[$
$x+7$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$(x+7)(x-5)$	$+$	$-$	$+$

Donc $\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+2x-35<0\}=]-7;5[$.

2) Avec le tableau de signes :
$\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{x+7}{x-5}\geqslant 0\right\}=]-\infty;-7]\cup]5;+\infty[$

3)
$$\frac{x+7}{x-5}\leqslant -2 \iff \frac{x+7}{x-5}+2\leqslant 0 \iff \frac{x+7}{x-5}+\frac{2x-10}{x-5}\leqslant 0 \iff \frac{3x-3}{x-5}\leqslant 0.$$

On dresse le tableau de signes :

$x\in$	$]-\infty;1[$	$]1;5[$	$]5;+\infty[$
$3x-3$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$\frac{3x-3}{x-5}$	$+$	$-$	$+$

Donc $\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{x+7}{x-5}\leqslant -2\right\}=[1;5[$

4) $[-2;-1]$

Ex 55

1) Méthode 1 : $P(x)=(3x-1)(-2x+5)$
utilisation d'un tableau de signes

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
signe de $3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $-2x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$

Méthode 2 : On a un polynôme du second degré. Le coefficient de degré 2 est $3\times -2=-6<0$. Ce polynôme est négatif à l'extérieur de racines.

2) On fait un tableau de signes

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
signe de $3x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\frac{3x-8}{2x+3}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Conclusion : $S=\left]-\frac{3}{2};\frac{8}{3}\right]$

3) $P(x)=(x-2)(3x+5)(3-7x)$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$\frac{3}{7}$		2		$+\infty$
signe de $x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $3x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $3-7x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : $S=\left]-\frac{5}{3};\frac{3}{7}\right[\cup]2;+\infty]$

4) Soit $Q(x)=\frac{7x-2}{4x^2-1}$
$4x^2-1$ est un polynôme du second degré ayant pour racines $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. Il est positif à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{7}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $7x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $4x^2-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
signe de $Q(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Conclusion : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left[\frac{2}{7};\frac{1}{2}\right[$

Remarque : On aurait pu aussi écrire $Q(x)=\frac{7x-2}{(2x-1)(2x+1)}$ et faire un tableau de signe.

5) On pose $Q(x)=\frac{4x^3-9x}{x^2-16}$.
On a $Q(x)=\frac{x(4x^2-9)}{(x^2-16)}$
$4x^2-9$ est un trinôme du second degré de racines $-\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2}$. Il est positif à l'extérieur des racines.
x^2-16 est un trinôme du second degré de racines -4 et 4. Il est positif à l'extérieur des racines.
On fait un tableau de signes. On note $A(x)=4x^2-9$ et $D(x)=x^2-16$

x	$-\infty$		-4		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
sgn x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
sgn$A(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
sgn$D(x)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
sgn $Q(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Conclusion :

$$S = \left]-4; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[0; \frac{3}{2}\right] \cup]4; +\infty[$$

Remarque : on peut aussi écrire :
$$Q(x) = \frac{x(2x-3)(2x+3)}{(x-4)(x+4)}$$
et faire un tableau de signes.

6) $(3x+2)^2 - (x-1)^2 \leqslant 0$
$\iff (3x+2-(x-1))\,(3x+2+(x-1)) \leqslant 0$
$\iff (2x+3)(4x+1) \leqslant 0$
On ait un tableau de signes. $S = \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right]$

7) On remarque que pour tout nombre x réel, on a $(5x+1)^2 + 9 \geqslant 9 > 0$
$S = \emptyset$

8) On remarque que pour tout nombre x réel, on a $3x^2+1 \geqslant 1 > 0$.
donc $(3x^2+1)(9-2x) > 0 \iff 9-2x > 0$
$S = \left]-\infty; \frac{9}{2}\right[$

9) x^2+2x-3 a pour racines -3 et 1.
x^2+3x+2 a pour racines -2 et -1
Les deux polynômes sont positifs à l'extérieur de leurs racines.
On fait un tableau de signes.
On note $Q(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x+2}$, $N(x) = x^2+2x-3$ et $D(x) = x^2+3x+2$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		1		$+\infty$
sgn $N(x)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
sgn $D(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
sgn $Q(x)$		$+$	0	$-$		$+$		$-$	0	$+$	

Conclusion
$S =]-\infty; -3[\cup]-2; -1[\cup]1; +\infty[$

Ex 56

1) $(2x-1)^2 \leqslant 3 \iff (2x-1)^2 - 3 \leqslant 0$
$\iff (2x-1-\sqrt{3})(2x-1-\sqrt{3}) \leqslant 0$
Ensuite deux méthodes de résolution : soit on fait un tableau de signes, soit on utilise le signe du trinôme du second degré (on connaît les deux racines $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$).
$$S = \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$$

2) $(x+3)^2 > 5(x+3(x-2)$
$\iff (x+3)^2 - 5(x+3)(x-2) > 0$
$\iff (x+3)(x+3-5(x-2)) > 0$
$\iff (x+3)(-4x+13) > 0$
On fait un tableau de signe. $S = \left]-3; \frac{13}{4}\right[$

3) $(x-1)^2(x-2) < (x^2-1)(2-x)$
$\iff (x-1)^2(x-2) - (x^2-1)(2-x) < 0$
$\iff (x-1)^2(x-2) + (x-1)(x+1)(x-2) < 0$
$\iff (x-1)(x-2)(x-1+x+1) < 0$
$\iff 2x(x-1)(x-2) < 0$
On fait un tableau de signes.
$S =]-\infty; 0[\cup]1; 2[$

4)
$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x+1} > 2 &\iff \frac{x-1}{x+1} - 2 > 0\\
&\iff \frac{x-1-2(x+1)}{x+1} > 0\\
&\iff \frac{-x-3}{x+1} > 0\\
&\iff -\frac{x+3}{x+1} > 0\\
&\iff \frac{x+3}{x+1} < 0
\end{aligned}$$

On fait un tableau de signes. $S =]-3; -1[$

5)
$$\begin{aligned}
\frac{3x-2}{5-3x} \geqslant 1 &\iff \frac{3x-2}{5-3x} - 1 \geqslant 0\\
&\iff \frac{(3x-2)-(5-3x)}{5-3x} \geqslant 0\\
&\iff \frac{6x-7}{5-3x} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Puis on fait un tableau de signes.
$$S = \left[\frac{7}{6}; \frac{5}{3}\right[$$

6)
$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x+2} \geqslant x &\iff \frac{2x+1}{x+2} - x \geqslant 0\\
&\iff \frac{(2x+1)-x(x+2)}{x+2} \geqslant 0\\
&\iff \frac{2x+1-x^2-2x}{x+2} \geqslant 0\\
&\iff \frac{1-x^2}{x+2} \geqslant 0
\end{aligned}$$

On fait un tableau de signes.
$S =]-\infty; -2[\cup]-1; 1]$

7) $\dfrac{5x+3}{3x+5} \leqslant \dfrac{3x+5}{5x+3}$
$$\begin{aligned}
&\iff \frac{5x+3}{3x+5} - \frac{3x+5}{5x+3} \leqslant 0\\
&\iff \frac{(5x+3)^2-(3x+5)^2}{(3x+5)(5x+3)} \leqslant 0\\
&\iff \frac{(2x-2)(8x+8)}{(3x+5)(5x+3)} \leqslant 0\\
&\iff \frac{2\times 8(x-1)(x+1)}{(3x+5)(5x+3)} \leqslant 0\\
&\iff \frac{(x-1)(x+1)}{(3x+5)(5x+3)} \leqslant 0
\end{aligned}$$
On fait un tableau de signes.
$$S = \left]-\frac{5}{3}; -1\right] \cup \left]-\frac{3}{5}; 1\right]$$

Ex 57

Pour $x \neq n$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-n} \geqslant x-n &\iff \frac{1}{x-n}-(x-n) \geqslant 0 \\
&\iff \frac{1-(x-n)^2}{x-n} \geqslant 0 \\
&\iff \frac{(x-n)^2-1}{x-n} \leqslant 0 \\
&\iff \frac{(x-n-1)(x-n+1)}{x-n} \leqslant 0 \\
&\iff \frac{(x-(n+1))\,(x-(n-1))}{x-n} \leqslant 0
\end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{n\}$, on pose
$Q(x) = \dfrac{(x-(n+1))\,(x-(n-1))}{x-n}$

x	$-\infty$		$n-1$		n		$n+1$		$+\infty$
signe de $x-(n-1)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x-(n+1)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x-n$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $Q(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Conclusion : $S =]-\infty; n-1] \cup]n; n+1]$

Ex 58

1) $[3; +\infty[$
2) $\left]\dfrac{12}{25}; \dfrac{1}{2}\right]$
3) $\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

V Fonctions

Ex 59

1) $\mathbb{R}^*$.
2) $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.
3) $\left]-\infty; -\dfrac{7}{3}\right[\cup \left]-\dfrac{7}{3}; +\infty\right[$.
4) $]1; +\infty[$.
5) $]-\infty; 3[\cup]7; +\infty[$.
6) $]-5; 2]$

Ex 60

1)
$f(1) = -2 \quad f(-2) = -0,5 \quad f(0) = -1,5$
$g(1) = 2 \quad g(-2) = 2 \quad g(0) = 3$
$h(1) = 2 \quad h(-2) = -1 \quad h(0) = 1$

2) « Le point $(-49; -48)$ appartient à la courbe représentative de h. » **VRAI**

3) Compléter
Si $f(x) = -3$, alors $x = 3$
Si $g(x) = 3$, alors $x = 3$ ou $x = -1$
Si $h(x) = 0$, alors $x = -1$
Si $f(x) = g(2)$, alors $x = -3$
Si $f(x) = h(x)$, alors $x = -1,75$
Si $g(x) > f(x)$, alors $x \in]-3; 3[$
Si $g(x) = h(x)$, alors $x = -4$ ou $x = 1$

4) f est positive sur $]-\infty; -3]$.
g est négative sur $]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$
h est strictement positive sur $]-1; +\infty[$.

Ex 61

1) $(x+1)^2 > x^2$
2) $(x-4)^2 < (x-3)^2$
3) $(x-4)^2 < (x-3)^2$

Ex 62

1) $1 \leqslant x \leqslant 4$
2) $9 \leqslant x < 49$
3) $1 \leqslant x < 16$
4) $0 < x < 64$
5) $0 \leqslant x \leqslant 25$
6) $0 \leqslant x < 5$

Ex 63

1) $\mathcal{C}_g$ est symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.
2) $\mathcal{C}_h$ est confondue avec $\mathcal{C}_f$.
3) $\mathcal{C}_i$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $-3\overrightarrow{i}$.
4) $\mathcal{C}_j$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{i}$.
5) $\mathcal{C}_k$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $7\overrightarrow{j}$.
6) $\mathcal{C}_l$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par une compression de l'axe des ordonnées de rapport 3.
7) $\mathcal{C}_m$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

Ex 64

$\mathcal{C}_g$ est en pointilles rouges (la seule courbe dont l'image de 0 n'est pas égale à -3.
$\mathcal{C}_h$ est en pointillées bleus (parmi les trois courbes restantes, c'est la seule dont le coefficient de x^2 soit positif).
Sachant que l'abscisse du sommet est $\frac{-b}{a}$, on constate que la courbe en trait plein verte représente f et que les pointillés oranges représentent k.

Ex 65

La parabole verte en trait plein s'annule pour $x = -1$ et $x = 3$. Son équation est donc du type $y = a(x+1)(x-3)$. Avec les coordonnées de son sommet $A(1; -2)$, on trouve que $a = \frac{1}{2}$.
La parabole en pointillés bleus s'annule pour $x = -3$ et $x = 5$. Son équation est donc du type $y = b(x+3)(x-5)$. Avec les coordonnées de son sommet $B(1; 4)$, on trouve que $b = \frac{-1}{4}$.
La parabole en pointillés rouges s'annule pour $x = -4$ et $x = 0$. Son équation est donc du type $y = cx(x+4)$. Avec les coordonnées de son sommet $C(-2; -4)$, on trouve que $c = 1$.
Il ne reste qu'à développer ces trinômes.

Ex 66

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{12}x^2 & \text{si } x \in [0; 6] \\ 5x - 15 & \text{si } x \in [6; 10] \end{cases}$$

Ex 67

$x \in [0;5]$ et $V(x) = 200x - \frac{4\pi}{3}x^3$

Ex 68

1) Si $x = 0$ alors $y = h = 1,50$

Si $x = 2$ alors $y = 0 = 4a + 1,5$ donc $a = -\frac{3}{8}$.

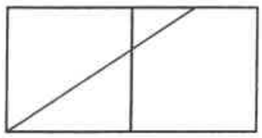
2) $v^2 = -\frac{6}{a} = 14$ donc $v = 4$ m/s.

Ex 69

1) $\ell(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{1+(2-x)^2}$

2) À la calculatrice on trouve que ℓ est minimale pour $x = \frac{4}{3}$.

Il est possible aussi de démontrer ce résultat à l'aide d'un patron (la ligne droite est la plus courte) :



Ex 70

La gouttière a une contenance maximale si son aire de coupe l'est aussi.
Or l'aire de coupe est égale à $a(x) = x(12-2x)$.
C'est une fonction du second degré, maximale si $x = 3$.

Ex 71

$f(x) = \frac{0,9}{1,35^2}x(2,7-x)$.

Ex 72

La fonction
$f : x \mapsto |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5|$ admet $x = 3$ pour axe de symétrie.
f est décroissante sur $]-\infty;3]$ et croissante sur $[3;+\infty[$.
$f(3) = 6$.
Pour $a = 6$ l'équation admet une unique solution.
Pour $a < 6$ l'équation n'a pas de solution.
Pour $a > 6$ l'équation a deux solutions distinctes.

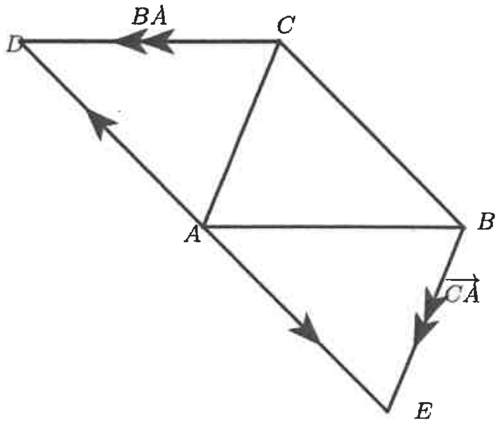
Ex 73

On suppose que f existe,
On obtient que $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$ ce qui contredit que f est strictement croissante.

VI Vecteurs et géométrie repérée

Ex 74

1) Pour construire D et E, on doit utiliser les relations $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$. Donc, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$. On obtient la figure :



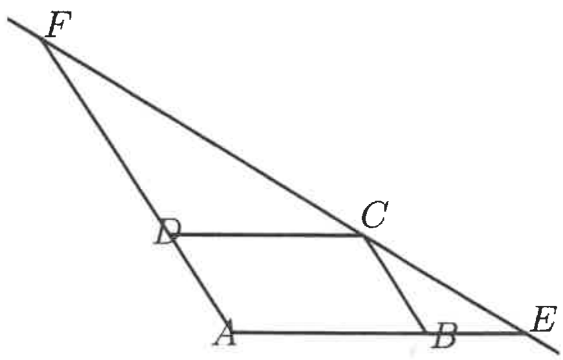
2) D'après les deux relations définissants D et E, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\\ &= -\left(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)\\ &= -\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)\\ &= -\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires, donc les points A, D et E sont alignés.

3) D'après la construction du point D, on a $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, on en déduit que $ABCD$ est un parallélogramme. Donc, les droites (CB) et (AD) sont parallèles, et d'après le 2. on a les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Ex 75



Le dessin montre que la question n'est pas absurde et qu'il semble que $\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{CE}$, résultat qu'on va prouver.
Exprimons le vecteur $\overrightarrow{FD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AD}$:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}\\ \iff\ & \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = 3\overrightarrow{AD}\\ \iff\ & \overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{AD}\\ \iff\ & \overrightarrow{FD} = -2\overrightarrow{AD} \qquad ① \end{aligned}$$

On a aussi la relation, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BE}$ ②

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FC} &= \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} && \text{d'après la formule de Chasles}\\
&= -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} && \text{d'après ①}\\
&= -2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} && ABCD \text{ étant un parallélogramme}\\
&= 2\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BE} && \text{d'après ②}\\
&= 2\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}\right)\\
&= 2\overrightarrow{CE} && \text{d'après la formule de Chasles}
\end{aligned}$$

On a bien $\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{CE}$, Les vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires, donc les points F, C et E sont alignés.

Ex 76

1)

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}\\
\iff & \overrightarrow{MA} + 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{0}\\
\iff & \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}\\
\iff & 4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}\\
\iff & -4\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}\\
\iff & -4\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB}\\
\iff & \overrightarrow{AM} = \frac{-3}{-4}\overrightarrow{AB}\\
\iff & \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant défini on peut placer le point M sans problème.

2)

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2}\overrightarrow{AM} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}\\
\iff & \frac{3}{2}\overrightarrow{AM} - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{0}\\
\iff & \frac{3}{2}\overrightarrow{AM} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}\\
\iff & \frac{9}{6}\overrightarrow{AM} - \frac{2}{6}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\\
\iff & \frac{7}{6}\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\
\iff & \overrightarrow{AM} = -\frac{6}{7} \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\
\iff & \overrightarrow{AM} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant défini, le point M est bien défini aussi.

Ex 77

1)

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}\\
\iff & \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\\
\iff & \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\\
\iff & \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\\
\iff & \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ étant défini on peut placer le point M sans problème, on a même ses coordonnées dans la repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.

2)

$$\begin{aligned}
& 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BC}\\
\iff & 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\\
\iff & -\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\\
\iff & \overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ étant défini on peut placer le point M sans problème, on a même ses coordonnées dans la repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.

Ex 78

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $P\left(0; \frac{3}{4}\right)$, $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $Q\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

$\overrightarrow{PM}\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{PQ}\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right)$

donc $\overrightarrow{PM} = 3\overrightarrow{PQ}$. Les vecteurs étant colinéaires,les points P, M et Q sont alignés.

Ex 79

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CD}$. On en déduit que $ICDJ$ est un parallélogramme.

Ex 80

1) $AB^2 = 65, AC^2 = 52, BC^2 = 65$. Donc le triangle ABC est isocèle en B.
2) $H\left(\frac{-3+3}{2}; \frac{2+6}{2}\right)$. Donc H(0;4).
3) Equation de (BK) : Soit $M(x;y) \in (BK) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}(x-4; y+2)$ est colinéaire à $\overrightarrow{BH}(-4;6) \Leftrightarrow 6x - 24 + 4y + 8 = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 8 = 0$
   Or $3 \times 2 + 2 \times 1 - 8 = 0$ donc $K \in (BH)$.
4) Comme le triangle ABC est isocèle en B, la médiane issue de B est aussi une hauteur. $BH = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}$ et $AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. Donc $Aire(ABC) = \frac{(2\sqrt{13})^2}{2} = 26u.a.$

Ex 81

1) $AB^2 = 40, AC^2 = 80, BC^2 = 40$. Donc le triangle ABC est isocèle en B et comme $AC^2 = AB^2 + BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, il est aussi rectangle en B.
2) On a R(3;2)
3) R milieu de [AE]$\Leftrightarrow 3 = \dfrac{-2+x}{2}$ et $\dfrac{-3+Y}{2} \Leftrightarrow x = 8$ et $y = 7$. Donc E(8;7).
4) R est le milieu de [BC] et de [AE] donc ABEC est un parallélogramme. De plus $AB \neq AC$ donc ABEC n'est pas un losange et (AB) n'est pas perpendiculaire à (AC). ABEC n'est pas un parallélogramme particulier.
5) BCEF est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow x - 8 = 2$ et $y - 7 = -6 \Leftrightarrow x = 10$ et $y = 1$. Donc E(10;1). ABEC est un parallélogramme donc (AB)//(CE) et $(BC)\perp(AB)$. Donc $(BC)\perp(CE)$. Ainsi BCEF est un rectangle.

Ex 82

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\frac{7}{6}\\-\frac{13}{6}\end{pmatrix}, \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$

$AB^2 = \dfrac{109}{36}, AC^2 = \dfrac{218}{36}, BC^2 = \dfrac{109}{36}.$

On observe que $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B. De plus $AB = BC$, on conclut que ABC est rectangle isocèle en B.

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}, \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

$AB^2 = 13, AC^2 = \dfrac{130}{4}, BC^2 = \dfrac{130}{4}.$

$AC = BC$, ABC est isocèle en C.

3) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-7\\-4\end{pmatrix}$

$AB^2 = 45, AC^2 = 20, BC^2 = 65.$

On observe que $BC^2 = AB^2 + CC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

Ex 83

1) $\Delta : (3-\sqrt{2})x + (2-\sqrt{2})y - 1 - \sqrt{2} = 0.$

2) $\Delta : 20x + 30y - 3 = 0.$

3) $\Delta : 7x + 5y + 4 = 0.$

4) $\Delta : 3x + 2y - 2\sqrt{3} = 0.$

Ex 84

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires si et seulement si

1) $m = 2(3 - 2\sqrt{2})$

2) $m = \dfrac{1-\sqrt{2}}{3}$

3) $m = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$ ou $m = -\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

Ex 85

1) $D(-5;-3)$ et $L(-1;0)$.

2) $G\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

3) a) $E(-10;-5)$.

b) $\overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{GB}$, les points E, G, B sont alignés. (Justifier)

Ex 86

1) Les points A, B, C ne sont pas alignés. Alors les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ ne sont pas colinéaires. Donc $(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$ est un repère du plan.

$R\left(\dfrac{6}{5};0\right), \quad P\left(0;\dfrac{2}{3}\right), \quad Q\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4}\right).$

2) $\det(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{PR}) = \begin{vmatrix}\frac{9}{20} & \frac{6}{5}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{2}{3}\end{vmatrix} = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires. Donc les points P, Q, R sont alignés.

Ex 87

1) $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$. Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles. $ABDC$ est un trapèze.

2) $D(8;-7)$, $I(1,2)$ et $J((2;-4)$.

3) a) Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc , par définition, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$.

$E(-1-3k;3-4k)$.

b) $\det(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD}) = 0 \iff \begin{vmatrix}-4-3k & 5\\ 2-4k & -8\end{vmatrix} = 0$

$\iff 44k + 22 = 0 \iff k = -\dfrac{1}{2}$

Donc $E\left(\dfrac{1}{2};5\right)$.

4) $(AD) : 10x + 9y - 17 = 0$,

$(BC) : 2x - 7y + 1 = 0$.

5) $F\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{1}{2}\right)$.

6) $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{EI} = -4\overrightarrow{FI}$ donc les points E, I, F et J sont alignés.

Ex 88

1) $A(4;-2)$.

2) $E(3;0)$, $F(0;6)$, $B(2;0)$ et $C(0;2)$.

3) $\mathcal{A}(BCFE) = 7$, et $\mathcal{A}(ABE) = 1$.

4) $\mathcal{A}(ACF) = 8$. or $\mathcal{A}(ACF) = \dfrac{CH \times AF}{2}$ donc $CH = \dfrac{16}{AF} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.