ministère
éducation
nationale
ÉduSCOL
[dgesco]

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Formation continue
Publications

Actes du séminaire national

L'enseignement des mathématiques à l'école primaire

Paris, le 13 et 14 novembre 2007

Février 2008

▸▸ *eduscol.education.fr/forensactes*

PROGRAMME NATIONAL DE PILOTAGE

L'enseignement des mathématiques à l'école primaire

Actes du séminaire national

13 et 14 novembre 2007

École nationale de chimie, physique, biologie (ENCPB), Paris

Ministère de l'Éducation nationale

Direction générale de l'enseignement scolaire

Sommaire

Conférences et table ronde

Annexes

NB : Les vidéos des conférences et de la table ronde du séminaire ont été mises en ligne sur le site http://webtv.ac-versailles.fr/

Ouverture des travaux

René Macron, chef du bureau des écoles, représentant Jean-Louis Nembrini, directeur général de l'enseignement scolaire

Bonjour à toutes et à tous. Au nom du directeur général de l'enseignement scolaire, je vous adresse des remerciements. J'exprimerai également quelques regrets.

Les remerciements vont avant toute chose à Jean-Louis Durpaire et Marie Mégard, qui sont parvenus à organiser ce séminaire avec une obstination rare et malgré des vicissitudes sans nom. Les grèves constituent la dernière d'entre elles, et nous conduisent à raccourcir, en toute dernière minute, la journée de demain. Les participants pourront ainsi être libérés avant qu'ils ne se trouvent totalement bloqués dans Paris. Nous regrettons donc de devoir annuler les ateliers prévus dans la matinée, afin de les remplacer par les conférences prévues l'après-midi.

Je répète une nouvelle fois que nous regrettons vivement d'avoir dû prendre cette décision, sans avoir du reste prévenu quiconque. Nous n'avions pas mesuré l'ampleur de la situation. Nous nous excusons encore auprès de tous ceux qui avaient travaillé à la préparation des ateliers.

Je vous rappelle néanmoins que nous avions conçu ces deux journées non comme un événement, mais comme le moment d'un travail dans la continuité. Il devait permettre de structurer une réelle formation continue. Malgré ces aléas, ce projet n'est pas annulé. Nous pensions être en mesure d'amorcer certaines actions dès demain, mais cette suite ne se déroulera sans doute pas exactement comme prévu. Les responsables d'ateliers peuvent donc être rassurés : le travail que nous avions imaginé mener dans la durée se fera.

Pour ouvrir ce séminaire, je ne me concentrerai pas sur l'enseignement des mathématiques, qui ne constitue nullement ma spécialité. J'essaierai plutôt de fournir un éclairage contextuel au sujet du jour. Il porte essentiellement sur deux éléments, en lien direct avec le socle commun inscrit dans la loi : les programmes de l'école et les dispositifs d'évaluation tout au long de la scolarité obligatoire.

Le socle commun définit des principes et des contenus, mais il ne constitue pas le programme de l'école obligatoire, ni même le minimum requis ou admissible de l'éducation. Il vise en fait à retrouver en partie l'idéal républicain tel que le début du XX^ème^ siècle l'a généré. Les instructions de 1923, reprenant celles de 1887, sont volontiers citées. Elles indiquaient que l'objet de l'école primaire n'était pas d'embrasser tout ce qu'il était possible de savoir, mais plutôt d'apprendre tout ce qu'il n'était pas permis d'ignorer. Cette formule avait un sens à une l'époque où la scolarité de la plupart des enfants s'achevait après le certificat d'études. La situation est aujourd'hui différente, dans la mesure où les élèves vont à l'école jusqu'à l'âge de 16 ans, le monde a changé, et ce qu'il n'est pas permis d'ignorer a également évolué depuis 1887.

S'agissant des mathématiques et des disciplines scientifiques, le socle pose certains principes. Nullement nouveaux, ils vont du concret vers l'abstraction en suivant un chemin centré sur des connaissances précises, des compétences et des attitudes. Il s'agit de partir de faits concrets, proches de la réalité, pour accéder à des concepts et des abstractions.

Sa mise en place dans les classes s'opère aujourd'hui à travers la résolution de problèmes et des contenus d'enseignements centrés sur la numération, les techniques opératoires, etc. La question est de savoir quelle articulation existe entre ces différents éléments, mais aussi quels sont les contenus précis qui doivent être enseignés. A cet égard, le Ministre a récemment demandé que les programmes de l'école soient réécrits. Ils le seront donc, et ce, à partir de quelques principes

- Les programmes doivent s'articuler avec le socle commun de connaissances et de compétences. Du reste, la révision des programmes en 2007 a déjà largement mené ce travail, dans le domaine des mathématiques comme dans celui de la maîtrise de la langue.

- Ils doivent être lisibles par tous comme l'est le texte de culture partagée que représente le socle commun, ils doivent en effet être accessibles aux enseignants comme aux parents.

- Ils doivent respecter la liberté pédagogique. Celle-ci fait débat. La loi dispose qu'elle commence et s'arrête au programme, mais aussi à l'équipe de l'école. La liberté pédagogique n'est en effet pas une forme de liberté individuelle permettant à chacun de procéder comme il le souhaite.

Afin de pouvoir à la fois être plus lisible pour tous, et respecter la liberté pédagogique, la rédaction des programmes devra se montrer plus précise qu'elle ne l'est actuellement sur les objectifs à atteindre, les contenus à enseigner, et surtout les éléments qui sont attendus d'un élève à la fin de sa scolarité primaire.

Si nous sommes en mesure de nous montrer plus précis sur ce que la Nation attend des compétences d'un élève en fin d'école primaire, nous devrons simultanément faire preuve de la même précision dans la mise en œuvre des dispositifs d'évaluation. L'effort sera donc double : clarifier les programmes, en les rendant compréhensibles pour tous, et les articuler avec des dispositifs d'évaluation tout aussi clairs et lisibles.

Ce chantier est en cours. De nombreuses avancées ont d'ailleurs déjà été réalisées dans le domaine des mathématiques. Ce travail important reste à synthétiser et à formaliser.

Au regard de nos connaissances actuelles, il nous est parfaitement possible de nous montrer clairs et précis sur ce que nous pensons indispensable qu'un élève sache dans le domaine des mathématiques au sortir de l'école primaire et avant son entrée au collège. Ces deux jours contribueront sans nul doute à faire progresser cette question.

Conférences

et tables rondes

La place du calcul et des problèmes dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire

Jean-Louis Durpaire, inspecteur général de l'Éducation nationale

Cette intervention reprend largement les analyses et réflexions exposées dans le rapport de l'inspection générale sur l'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire[1]. Ce rapport recommandait tout particulièrement la mise en place de plusieurs actions de formation nationale pour « faire le point sur les recherches pédagogiques et didactiques et les confronter aux réalités de l'enseignement ». Ce séminaire est une première réponse et je remercie la direction générale de l'enseignement (DGESCO), son directeur M. Jean-louis Nembrini, et les bureaux de Monsieur René Macron et de Mme Virginie Gohin d'avoir permis de tenir ces deux jours de travail. Je remercie également tous nos intervenants qui ont accepté avec enthousiasme d'apporter leur contribution.

Jusqu'en 1970, à l'école primaire, le calcul constituait l'essentiel de l'enseignement des mathématiques

Préférant se centrer sur un constat et une analyse des réalités de l'enseignement des mathématiques dans les classes en 2005-2006, le rapport précité n'a pas cherché à développer longuement l'évolution historique. Nous nous sommes contentés de rappeler l'esprit des premiers programmes de l'école. Il est pourtant intéressant de relire les épreuves proposées aux élèves de onze ans, voire dix, pour entrer en sixième à la fin des années cinquante, ainsi que celles du certificat d'études qui donnait le cap du travail dans les classes.

I Opérations : *30,5 + 289 + 0,855 ; 464 - 92,64 ; 364,16 x 30,20 ; 431,16 : 0,585*

II *Problème : Une personne achète, au prix de 2800 F (28NF) l'are, un champ rectangulaire dont le périmètre est 852 m et dont la longueur est le double de la largeur.*

1.Calculez les dimensions du terrain.

2.Donnez en ares la surface de ce champ.

3.Elle paie immédiatement la moitié et elle paie l'autre moitié six mois plus tard avec un intérêt annuel de 5 % ; calculez le montant de chaque versement.

Entrée en 6ème Nancy 1959

Le constat est que l'on demandait une très grande capacité de calcul, voire même une certaine virtuosité dans la partie dite des « opérations », par exemple avec la division de deux nombres décimaux. Réussir la division 431,16 : 0,585 suppose une connaissance parfaite des

[1] L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire, rapport de l'inspection générale de l'éducation nationale, juin 2006
http://media.education.gouv.fr/file/46/0/3460.pdf

techniques ; savoir que l'on se ramène à la division de 431 160 par 585 en « déplaçant les virgules ». La critique ultérieure a porté sur le côté mécanique de ce geste, mais ce geste pouvait-il être ancré dans la mémoire s'il n'était pas lié à son sens réel. En tout cas, il est clair que la connaissance par cœur des tables d'opération était indispensable. L'entraînement se devait d'être régulier.

Les techniques opératoires utilisées, notamment pour la division, étaient le plus dépouillées possible. Ne posant pas les soustractions, n'ayant pas le recours ou le secours des multiplications intermédiaires posées à côté de l'opération cherchée, tout devait se passer mentalement. On peut donc affirmer que les exercices d'opérations posées étaient la base première de l'entraînement au calcul mental dans sa dimension de connaissance des tables d'addition et de multiplication. Cette exigence se comprenait parfaitement dans une société où il fallait savoir compter dans toutes les situations de la vie : pour faire les courses, pour réaliser des travaux divers… Mais calcule-t-on moins aujourd'hui ? Les chiffres ne sont-ils partout présents ? Et ne faut-il pas cette même compétence calculatoire en tous lieux ?

Faire des problèmes était l'autre activité majeure : s'agissait-il de montage de mécanismes ou de résolution de problèmes ?

Les problèmes posés à cette époque appelaient une lecture attentive des énoncés, une capacité à se représenter une situation et laissait place à des formes de réponse diversifiées même lorsque les énoncés apparaissaient simples et comportant exactement les éléments utiles.

Ainsi, le problème énoncé ci-dessus pouvait conduire l'élève au tracé d'un rectangle respectant la condition posée (la longueur est le double de la largeur) ou à un raisonnement arithmétique (sans l'appui de la figure) permettant de « voir » que la réponse s'obtient en comprenant que le périmètre « vaut » six fois la largeur, ce raisonnement étant très proche d' une écriture algébrique (L= 2 l ; 852 = 6 l).

Au certificat d'études, en adoptant la terminologie contemporaine, nous dirions que les « compétences attendues » étaient de même nature. Il s'agissait, d'abord, de montrer que l'on savait calculer, c'est-à-dire, trouver les bonnes opérations à faire et les effectuer. On notait aussi l'application à rédiger les « solutions ».

I Sur la carte au 1/ 3 500 000, la distance Paris - Rome mesure 31 cm. Une famille de 5 personnes dont 3 enfants de moins de 10 ans part de Paris, en avion, à 10h45 et arrive à Rome le même jour à 12h25.

1. Quelle est, en km, la distance Paris - Rome ?

2. Calculer la vitesse moyenne par h de l'avion.

3. Les adultes paient 25 000F (250 NF) par place et les enfants de moins de 10 ans ont une réduction de 40 % chacun. A quelle somme totale revient le voyage ?

4. A combien revient, pour cette famille, le km parcouru ?

II Un terrain, dont tous les angles sont droits, a la forme et les dimensions ci-dessous.

1. Reproduisez le croquis en mettant les dimensions qui manquent.

2. Quelle est la surface du terrain ?

3. On l'entoure d'un grillage qui revient tout compris à 398 F (3,98 NF) le m ; sur une longueur de 4 m, le grillage est remplacé par une barrière qui revient à 2 600 f (26 NF). Que est le prix de revient de cette clôture ?

4. On joint les points C et F par une ligne droite. Quelle est la surface de la parcelle ABCF ?

Certificat d'études, Cher, 1959

La capacité à calculer n’est pas dissociable de la capacité à traiter des données. Le problème ci-dessus appelle des « attitudes » mathématiques telles que la rigueur dans les calculs, le goût du raisonnement, le réflexe de contrôler la vraisemblance des résultats, la volonté de justesse dans l’expression des résultats. En matière de « capacités », il permet de vérifier que l’élève sait utiliser des « connaissances sur les nombres naturels et décimaux et sur les opérations étudiées » et « résoudre dans des cas simples des problèmes relevant de la proportionnalité (pourcentages, échelles, conversions… ».

La première partie du problème ci-dessus est une situation qui fait appel, en effet, à la notion d’échelle, de proportionnalité. Elle comporte un « habillage » accessible pour les élèves de cet âge, même si la quasi-totalité d’entre eux n’a jamais pris l’avion. La représentation de la situation est simple, l’obstacle porte plutôt sur l’opération à effectuer et sur les unités mises en jeu (conversion des centimètres en kilomètres). La vraisemblance du résultat est un élément important : un élève de fin d’études doit savoir que la distance Paris - Rome est de l’ordre du millier de kilomètres et non de la centaine ou de la dizaine de milliers. De même la vitesse moyenne d’un avion doit être vraisemblable. On note aussi que l’on s’autorise, à l’inverse, une question sans aucune pertinence réelle « le prix de revient du kilomètre parcouru pour cette famille ? », le seul but étant probablement de donner quelques points supplémentaires aux meilleurs élèves car, pour la résoudre, il faut impérativement avoir répondu aux questions précédentes et savoir faire une division, ce qui a déjà été vérifié.

La deuxième partie qui est un autre problème, sous un habillage différent, fait appel aux mêmes compétences. Les capacités en matière de calcul sont testées et re-testées ; calculer la surface du terrain appelle une réflexion sur le découpage à effectuer, mais il est sans complexité particulière. La troisième question est de même nature : l’élève doit mettre en action ses compétences en matière de proportionnalité et sa vigilance car la clôture est effectuée selon deux procédés complémentaires. Mais le schéma du problème est globalement du même type que le premier et l’enseignant aura dû apprendre non pas à monter des mécanismes voire des réflexes, mais bien à résoudre une « classe de problèmes ».

La rupture de 1970 : une priorité clairement donnée à la formation aux mathématiques et pas seulement au calcul

Nous n’avons pas voulu, non plus, développer longuement dans le rapport cette période des années 70 même si des maîtres encore en exercice ont été formés dans le contexte de cette révolution des objectifs assignés à l’école primaire dans ses programmes de mathématiques. Sans disparaître tout à fait, le mot « calcul » n’apparaît plus que deux fois dans le texte du programme. Quant à l’esprit, il est donné par la circulaire du 2 janvier 1970 : « L’enseignement mathématique à l’école élémentaire veut répondre désormais aux impératifs qui découlent d'une scolarité obligatoire prolongée et de l’évolution contemporaine de la pensée mathématique. Il s'agit, dès lors, de faire en sorte que cet enseignement contribue efficacement au meilleur développement intellectuel de tous les enfants de six à onze ans afin qu'ils entrent dans le second degré avec les meilleures chances de succès. L’ambition d'un tel enseignement n'est donc plus essentiellement de préparer les élèves à la vie active et professionnelle en leur faisant acquérir des techniques de résolution de problèmes catalogués et suggérés par “la vie courante”, mais bien de leur assurer une approche correcte et une compréhension réelle des notions mathématiques liées à ces techniques. »

Cette ambition se situe dans le double contexte de la réforme globale de l’enseignement des mathématiques, très inspirée de la reconstruction des mathématiques proposée par Bourbaki et d’une pensée psychologique où dominent les concepts proposés par Piaget.

La conséquence pratique est que les maîtres sont invités – notamment dans les stages de formation continue qui débutent à l’époque – à travailler la « compréhension » des notions en profondeur ; les maîtres sont invités à remiser leurs pratiques traditionnelles jugées trop mécanistes pour y substituer des démarches permettant d’accéder à un sens plus profond avec l’objectif de mieux fixer l’essentiel ; ainsi l’approche du nombre à la maternelle ne passe plus par une répétition de la comptine numérique mais par une construction reposant sur des situations qui permettent au nombre d’apparaître dans des classes d’équivalence constituées dans des ensembles d’objets. En matière de numération, l’écriture décimale n’apparaîtra qu’après un passage par d’autres bases ou même des systèmes ayant des principes différents.

Ces modifications des programmes de mathématiques ont touché l’ensemble des programmes de la maternelle au lycée ; les ruptures ont d’ailleurs été ressenties de manière aussi violente par certains enseignants de mathématiques qui voyaient arriver, par exemple, une géométrie sans figures et une présence très large des structures algébriques.

Si cette période fut très courte, puisque le programme de 1970 ne resta en application que moins de dix ans, elle a marqué profondément une génération d’enseignants, leurs formateurs et l’histoire de l’enseignement des mathématiques.

La didactique des mathématiques a donné un sens nouveau à la notion de problème

Le rapport de l’Inspection générale de l’Éducation nationale (IGEN) n’a fait qu’évoquer la naissance – finalement récente – de la didactique des mathématiques. On peut, ici, souligner à quel point les travaux de Guy Brousseau et de tous ceux qui ont travaillé sous son autorité bienveillante et tonique ont apporté comme éléments pertinents pour un enseignement des mathématiques efficace. La notion de « contrat didactique » est devenue essentielle à la compréhension de ce qui s’opère durant un temps de classe. Pour m’en tenir à deux réflexions puisque plusieurs de nos intervenants sont d’éminents spécialistes de la didactique des mathématiques et ont justement été sollicités pour nous dire les apports de la Théorie des situations didactiques (TSD), je m’en tiendrai à deux citations distantes de vingt ans environ. En 1986, dans sa TSD, Guy Brousseau indique que « le seul " moyen " de faire des mathématiques, c’est de chercher et résoudre certains problèmes spécifiques et, à ce propos, de poser de nouvelles questions. Le maître doit donc effectuer non la communication d’une connaissance, mais la dévolution du bon problème… » Il précise ce qu’il entend par contrat didactique : « Dans le jeu du maître avec le système élève-milieu, le contrat didactique est le moyen d’établir les règles et stratégies de base puis de les adapter aux changements de jeu de l’élève ». On sait tous les travaux qui ont été réalisés pour permettre d’approcher les notions de la manière la plus « propre » possible.

Et en 2005, Gilbert Dumas écrit dans *Sur la théorie des situations didactiques : «* J’ai vu si souvent des enseignants présenter la dévolution comme une recette que je me demande si les réelles conditions de la dévolution n’étaient pas voilées, voire scotomisées par les formalisations de la théorie… ». Il questionne Brousseau sur les risques de la dévolution, ce à quoi Brousseau répond qu'il ne faut pas confondre – je simplifie à l'excès – la TSD qui donne des moyens d'analyse des situations et les mises en situation pratique.

Rejoignant cette observation de Gilbert Dumas, les constats de l'Inspection générale en matière de conception de l'activité « Résolution de problèmes » dans ses liaisons avec la notion de calcul ont conduit à écrire, après une réflexion approfondie entre les collègues co-auteurs du rapport à choisir le terme « brouillé ».

La notion de problème est brouillée

Le rapport a évoqué, à la fois, la place du problème dans les activités mathématiques, en s'interrogeant notamment pour savoir si elle était bien centrale, c'est-à-dire, permanente, ou bien spécifique, c'est-à-dire, limitée finalement à des temps d'apprentissage.

Nos observations ne se sont pas arrêtées avec la fin de notre étude. Avec un recul de plus d'un an, les exemples de situation se sont accrus. Je me propose donc de revenir sur quelques points à partir d'un exemple déjà développé dans le rapport (non repris ici) et de deux autres observés plus récemment. Les constats sont les mêmes. Ils peuvent être résumés de la manière suivante :

- Trop souvent, les objectifs de la situation sont perdus de vue, ce qui conduit à des temps de classe sans aucune conclusion.
- Les objectifs d'apprentissage se trouvent dilués, noyés dans un objectif vague « on cherche ».
- Les situations d'apprentissage proposées sont appuyées sur des notions qui ne relèvent pas des programmes du niveau concerné.
- Les procédures personnelles tendent à être stabilisées au détriment des procédures expertes qui, en conséquence, ne sont pas exercées.
- Les maîtres ne sont pas assez attentifs aux connaissances des élèves ; ils ne les laissent pas utiliser ce qu'ils savent, ce qui est acquis ; dans trop de cas, le maître s'enferme dans le schéma d'apprentissage qu'il a prévu sur sa « fiche de préparation ».
- Les maîtres ne sont pas assez attentifs aux erreurs des élèves ; pourtant, c'est en regardant travailler les élèves au plus près de leur crayon que l'on peut comprendre ce qui se passe dans la tête…et donc agir, rectifier, installer la bonne méthode, etc.
- Les activités ne sont pas assez différenciées. Il faut tenir compte des connaissances réelles des élèves.
- Les travaux en groupes ne sont pas toujours maîtrisés ; la réflexion personnelle est trop souvent négligée.

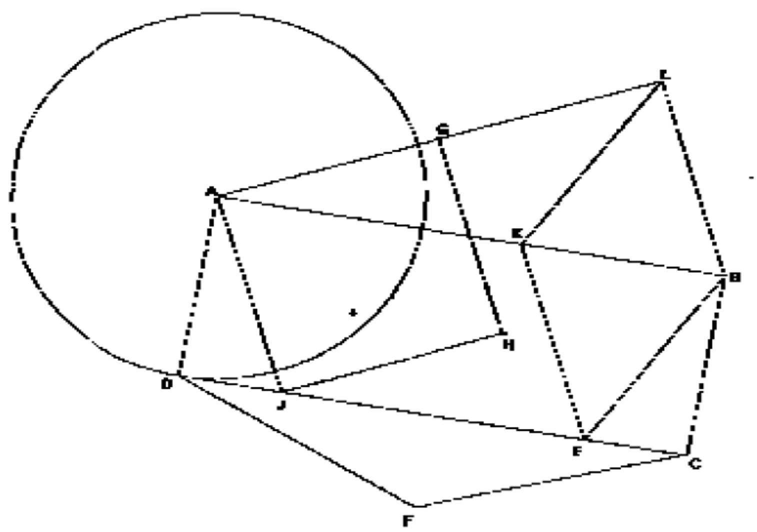
Des exemples :

CM1- 28 élèves
Dimitri a 40 €. Il veut acheter 2 modèles de bateaux miniatures à 5 € et à 3 €. Peux-tu indiquer le nombre de bateaux de chaque sorte qu'il pourra acheter avec la totalité de la somme ?

Observations : l'exercice est concret; il est choisi en fonction de l'actualité (Route du rhum). L'enseignante maîtrise parfaitement la discipline, mais des travaux en groupes… dans une ambiance sonore rendent toute réflexion impossible. C'est donc un problème de démarche pédagogique qui privilégie les travaux de groupes par rapport à la réflexion individuelle.

CM1-10 élèves

Géométrie - Retrouve chacune des figures en étant le plus précis possible :



Complète le tableau

Figures (nom) / Nombre					

Observations : Le tableau induit une réponse selon cinq termes. La correction au tableau conduira à un accord de la classe sur le nombre de figures simples : 11 dont 7 triangles, ce qui est faux. Pas d'interrogation sur le sens de la consigne « le plus précis possible ». Triangle rectangle, isocèle…Et que signifie « retrouve » ? Pas de vérification de l'exactitude des réponses, ni sur les formes, ni sur le nombre. Ce « problème » n'est-il pas trop complexe dans le temps imparti ? Une conclusion « on a fait de la géométrie perceptive » apporte peu aux élèves.

En conclusion, une question centrale : comment redonner sa place au calcul et repenser l'activité problème ?

Rappelons d'abord les huit recommandations exprimées dans le rapport :

- différencier les activités proposées aux élèves à chaque séance de mathématiques, cette discipline s'y prêtant particulièrement bien ;
- être attentif aux erreurs commises par les élèves ; s'attacher à les comprendre et y remédier dès leur découverte ;
- rééquilibrer, partout où c'est nécessaire, les temps d'activité des élèves de manière globale sur une année en accordant davantage de place aux exercices d'entraînement ;
- équilibrer les activités au cours d'une séance de mathématiques en commençant systématiquement par un temps de calcul mental ;
- suivre une progression en calcul mental ; s'assurer de la connaissance des tables d'opération (par cœur) ;

- faire une place plus large au calcul instrumenté;
- avoir recours aux outils informatiques, notamment pour individualiser les apprentissages ;
- faire résoudre des problèmes empruntés aux situations de la vie courante, à celle des élèves et de leurs familles.

Je voudrais les illustrer, au moins en partie, en prenant appui sur un jeu, bien connu à l'école maternelle : chemins et bandes de couleurs. Ce jeu vient de faire l'objet d'un intéressant article[2] dans le numéro 456 des Cahiers pédagogiques ; il est également proposé par l'équipe de la circonscription de Strasbourg 5 avec une variante[3].

Il me semble caractéristique d'une démarche qui convient parfaitement à l'enseignement des mathématiques : le maître propose une situation :

- simple : les règles sont accessibles aisément ;
- avec des variables multiples : nombre de cases, matériel (dé ou carte), etc.; avec un objectif de la connaissance des nombres permettant des progressions dans la réussite si l'on réalise des acquisitions.

Mais ce n'est pas tant la situation en elle-même qui importe ; c'est la compétence du maître à s'en saisir. S'il suit les recommandations, même excellentes, comme celles formulées par les fiches pédagogiques évoquées ci-dessus, il risque fort de ne rien percevoir des difficultés des élèves. Ce n'est pas la qualité des recommandations qui est ici l'objet d'une critique, mais le fait que le maître ne doit pas être « esclave » d'une fiche de préparation ou de guidage. Par exemple, l'introduction d'un « meneur de jeu » qui distribuera les jetons demandés par un élève – ce qui permettra d'éviter que l'élève joue correctement sans compter – est **excellente,** mais encore faut-il mettre en action cette suggestion que si le besoin est avéré et non parce que la situation « didactique » décrite par la fiche l'exigerait. Ce qui finalement est essentiel, c'est la capacité du maître à s'adapter aux réactions de ses élèves, de chacun de ses élèves, de manière assez spontanée et à proposer des variantes de manière immédiate, soit pour déstabiliser une erreur, soit pour aider à la consolidation d'une notion.

Soulignons enfin que dans toutes les situations, les procédures personnelles doivent être acceptées, d'autant plus qu'elles peuvent être expertes. A ce propos, observons que cette acceptation des procédures personnelles ne date pas d'hier puisqu'en 1911, Bourlet écrivait dans l'article sur les mathématiques : « *L'un des grands avantages du calcul mental est d'exciter l'ingéniosité de l'élève, de l'obliger à réfléchir, de le forcer à bien se pénétrer du sens des opérations qu'il fait ; mais cet avantage n'est réel que si on laisse à l'enfant une certaine latitude, si on l'abandonne un peu à lui-même de façon qu'il se crée des petites méthodes personnelles* ».

Et pour conclure sur la question posée sur la place du calcul et des problèmes, je reprendrai la phrase de Michèle Artigue : « *Faire aimer les mathématiques, c'est aussi faire aimer ce calcul sans lequel elles n'existeraient pas, sans lequel elles seraient impuissantes. Pour cela un équilibre doit être trouvé dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul entre automatisation et raison, ses deux facettes indissociables*. »

---

[2] Kirchmeyer, Sylvie, *Le jeu et les apprentissages mathématiques* in Dossier L'école maternelle aujourd'hui, CRAP Cahiers pédagogiques N°456, octobre 2007
http://www.cahiers-pedagogiques.com/article.php3?id_article=3298
Consulté le 29 octobre 2007

[3] http://sites.estvideo.net/ecole.hoffet/circo/documents/stage/stage_t1/Jeux_mathematiques_GS.pdf
Consulté le 29 octobre 2007

L’enseignement des mathématiques
à travers les nouveaux programmes et le socle commun

Jacques Moisan, doyen de l’inspection générale, groupe « mathématiques »

Je vais présenter, conformément à la commande, les nouveaux programmes de mathématiques de la scolarité obligatoire en essayant de **mettre en évidence quelques points forts** qui font l’objet d’une attention particulière de l’école au collège et qui sont au cœur du socle commun de connaissances et de compétences. Ces nouveaux programmes, publiés en avril 2007, ont plusieurs caractéristiques fortes :

- ils offrent une réelle continuité entre les programmes de l’école et les programmes du collège ;

- ils ont été conçus comme des programmes du pôle des sciences et offrent une meilleure synergie avec les programmes des autres disciplines scientifiques : cela se voit par exemple au collège au travers des thèmes de convergence ;

- ils mettent en évidence, à chaque niveau, les connaissances et les capacités attendues dans le cadre du socle commun.

Ainsi, les mathématiques contribuent à entraîner les élèves à la pratique d’une démarche scientifique consistant pour nous en la résolution de problèmes et, tout particulièrement dans le cadre du socle commun, de problèmes liés à la vie courante.

Le calcul sous toutes ses formes

C’est le titre même d’une université d’été que nous avons organisée en août 2005 avec la direction générale de l’enseignement scolaire. Elle a mis en évidence l’importance du calcul dans tous ses aspects : calcul mental, calcul posé, calcul instrumenté, mais elle a surtout montré – au-delà des aspects techniques – la nécessité du calcul réfléchi qui replace le calcul à l’intérieur même du raisonnement. Les nouveaux programmes de mathématiques et les documents d’accompagnement insistent d’ailleurs sur ce point : l’activité de démonstration n’est plus l’apanage de la partie « géométrie » du programme.

Le programme, à tous les niveaux, met l’accent sur le calcul mental : le calcul mental est une capacité qui doit être travaillée tout au long de la scolarité obligatoire, régulièrement, à l’aide d’exercices ciblés et spécifiques. Le calcul mental s’appuie d’abord sur la connaissance des tables d’addition et de multiplication « dans tous les sens ». Ce travail fondamental de mémorisation des tables est conduit essentiellement à l’école primaire, mais doit être entretenu tout au long de la scolarité obligatoire.

Le calcul posé reste une des capacités fondamentales, même si le calcul instrumenté (utilisation d’une calculatrice, puis d’un tableur) permet de le recentrer sur la compréhension des mécanismes à l’opposé de toute recherche de virtuosité. La maîtrise simultanée de ces trois techniques de calcul (calcul mental, calcul « à la main », calcul instrumenté) est un objectif essentiel de l’enseignement des mathématiques. C’est un préalable à ce que nous appelons le calcul réfléchi ou calcul intelligent.

Quels sont les attendus sur ce point ?

• D'abord, avoir compris le sens des opérations, lié au comptage, à la mesure, à la proportionnalité par exemple. Pour illustrer en creux cet impératif, je voudrais rappeler le taux de réussite – inférieur à 30 % –, dans le cadre d'une évaluation bilan de fin de 3^{e}, pour l'exercice suivant :

« *Sachant qu'une douzaine d'œufs coûte 13 €, pour trouver combien coûte un œuf, je calcule :*

13 + 12, *13 × 12,* *13 ÷ 12* »

qui montre que ce sens – en situation – des opérations, n'est pas une capacité universellement acquise.

• Être capable d'utiliser dans le contexte les propriétés des opérations : interprétation d'une multiplication comme une addition répétée, interprétation de la soustraction comme l'opération réciproque de l'addition (« addition à trou »), interprétation des nombres en écriture fractionnaire comme des quotients.

• Savoir passer d'une technique à l'autre pour le contrôle de la validité d'un résultat ou l'obtention d'un ordre de grandeur.

La résolution de problèmes

Comme je l'ai déjà dit, la résolution de problèmes constitue, dans le champ des mathématiques, la forme prise habituellement par la mise en œuvre de la méthode d'investigation. C'est, en fait, le cadre même de l'activité mathématique et le mode naturel de la mise en place de raisonnements.

• La résolution de problèmes permet d'abord de déboucher sur la mise en place de connaissances et de techniques nouvelles, dans le cadre de ce qu'on appelle habituellement les activités préparatoires ou activités d'introduction.

• La résolution de problèmes est aussi le moyen privilégié d'élargir le sens et d'assurer la maîtrise des connaissances et techniques déjà installées et, en particulier, d'en permettre des synthèses et des mises en cohérence.

• La résolution de problèmes doit être enfin le vecteur privilégié de l'évaluation, dans la mesure où les objectifs fondamentaux de l'enseignement des mathématiques ne s'expriment véritablement qu'en résolvant des problèmes.
Il est indispensable que les élèves soient confrontés à des problèmes riches permettant la mise en place de l'ensemble de la démarche mathématique :

- lire, organiser et interpréter l'information ;
- formuler des conjectures ;
- appliquer des méthodes, des techniques ;
- raisonner, démontrer ;
- contrôler, interpréter les résultats ;
- mettre en forme et communiquer.

Le champ des problèmes est large et les thèmes doivent être variés. Les mathématiques elles-mêmes (en particulier la géométrie) en fournissent abondamment, ainsi que les autres sciences. Mais il ne faut pas négliger les sciences humaines et l'ensemble des disciplines enseignées. Enfin, les problèmes dits de la vie courante, à condition qu'ils relèvent d'un contexte familier aux élèves, permettent de donner du sens à l'enseignement des mathématiques : ces thèmes sont, en particulier, à privilégier dans le cadre de l'acquisition du socle commun.

L'utilisation des TIC en mathématiques

Je voudrais insister sur le problème de l'utilisation des TIC en mathématiques. Pour nous, les technologies d'information et de communication recouvrent à la fois l'utilisation des calculatrices, l'utilisation de logiciels dédiés et celle de logiciels généraux. Dans notre discipline, ces technologies interviennent à la fois comme médias pédagogiques dans le cadre des apprentissages, de la formation voire des remédiations et comme outils dans le cadre de la démarche d'investigation et de résolution de problèmes.

Cet usage est progressif : il est modeste à l'école, puisque seul y semble important l'usage maîtrisé des calculatrices et devient essentiel au collège. Les mathématiques y sont alors une discipline importante dans la validation du B2i, c'est-à-dire du pilier 4 du socle commun.

L'utilisation d'une calculatrice puis de logiciels comme un tableur, un grapheur ou un logiciel de géométrie permet à l'élève d'explorer, de mettre en ordre, d'expérimenter, de conjecturer, de vérifier et de valider. Elle est souvent à la source même du raisonnement. Au collège et au lycée, comme dans la vie professionnelle des scientifiques – mathématiciens ou non –, la pratique des mathématiques n'a plus beaucoup de sens sans l'utilisation de ces outils. Dans les classes, cette utilisation régulière est un levier important dans l'acquisition du socle commun par tous les élèves.

Conclusion

En conclusion, je voudrais insister sur une particularité évidente des mathématiques : la construction des apprentissages se fait par accumulation, par couches successives et il est essentiel qu'à un niveau donné, les couches précédentes aient été mises en place. C'est la raison pour laquelle l'enseignement des mathématiques à l'école primaire est crucial. Mon souhait est que tous les élèves arrivant au collège maîtrisent les connaissances et capacités du socle commun exigibles en fin du cycle 3. Pour cela, il est, sans doute, nécessaire qu'on cesse de considérer les mathématiques comme une discipline parmi d'autres et qu'on lui redonne ce statut de discipline fondamentale qu'elle a, par nature. Au niveau de l'enseignement primaire, cet impératif a des incidences fortes sur les formations initiale et continue et sur l'investissement des enseignants !

Les mathématiques dans le socle commun de connaissances et de compétences, à l'école primaire : objectifs de formation, lien avec les programmes, évaluation.

Marie Mégard, inspectrice générale de l'Éducation nationale

Inscrit dans son principe dans la loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'école du 23 avril 2005, précisé dans le décret du 11 juillet 2006, le socle commun s'organise en sept compétences. Le terme « compétence » pouvant prêter à confusion, on a généralement tendance à lui préférer celui de « pilier » dans la littérature sur le socle ; j'emploierai désormais ce terme de pilier. Chacun des 7 piliers est conçu comme une *combinaison de connaissances, de capacités à les mettre en œuvre dans des situations variées, mais aussi d'attitudes*, que le texte du décret dit « *indispensables tout au long de la vie* ».

Enfin, *Le socle commun s'acquiert progressivement de l'école maternelle à la fin de la scolarité obligatoire.*

J'aborderai tour à tour les points suivants :

1. La place et le rôle des mathématiques dans le socle
2. L'articulation socle – programme à l'école primaire
3. L'évaluation des principaux éléments de mathématiques : le livret d'évaluation
4. Le rôle du calcul dans la formation de l'élève
5. La résolution de problèmes
6. Les autres domaines
7. Le socle, levier pour une évolution des pratiques des enseignants

1. La place et le rôle des mathématiques dans le socle

Les mathématiques constituent la partie A du pilier 3: *les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique*.
En introduction de la partie A, le décret précise les objectifs assignés à l'enseignement des principaux éléments de mathématiques : il est dit d'abord
Les mathématiques fournissent des outils pour agir, choisir et décider dans la vie quotidienne
Et ensuite un peu plus loin, que :
Les compétences acquises en mathématiques conditionnent l'acquisition d'une culture scientifique.

Ces deux objectifs nous posent deux questions : Quelles mathématiques dans le socle ? Pour quoi faire ?

Des outils pour agir, choisir et décider dans la vie quotidienne :

On trouve en fait dans le socle deux types d'outils pour le futur citoyen :

- d'une part, des outils techniques, qui lui seront nécessaires dans sa vie de tous les jours, et qu'il lui faudra pouvoir mobiliser sans difficulté : calculs des quatre opérations, notions de base sur la proportionnalité, calculs de statistiques élémentaires (moyenne, médiane), mais aussi connaissance des principales grandeurs et de leurs mesures, et des bases de géométrie. La responsabilité de l'École sur l'acquisition de la plupart de ces outils est particulièrement forte ;
- d'autre part, des outils logiques : il s'agit d'apprendre à raisonner, notamment pour résoudre des problèmes de la vie courante. Là encore, c'est à l'école que doit démarrer cet apprentissage, qui sera très largement continué au collège.

Des bases pour l'acquisition d'une culture scientifique

Les fondamentaux décrits en première partie, les bases de calcul et de géométrie, la capacité à résoudre des problèmes, sont nécessaires, indispensables même, à une poursuite d'études scientifiques, que ce soit en sciences physiques, en sciences de la vie et de la Terre, en mécanique ou en électronique pour ceux qui choisiront un cursus technologique, ainsi évidemment qu'en mathématiques.

En fait ces deux objectifs, *donner au futur citoyen des outils pour agir, choisir et décider dans la vie quotidienne*, et *fournir les outils nécessaires à l'acquisition et au développement des compétences scientifiques des élèves*, ne sont pas seulement visés par le socle, mais se retrouvent aussi dans les objectifs principaux de l'enseignement des mathématiques à l'école et au collège.
Ils sont peut-être simplement énoncés de manière un peu différente dans le socle, ce qui a eu quelques conséquences sur la réorganisation des programmes qui a suivi.

2. L'articulation socle-programme

Le socle commun fixe dans les principaux domaines des mathématiques un certain nombre d'objectifs, à atteindre en fin de scolarité obligatoire. Le travail qui a été effectué a consisté dans un premier temps à repérer dans le programme de 2002 (dont les contenus généraux n'ont pas été remis en question) les éléments clés qui contribuaient à ces objectifs de fin de scolarité obligatoire, puis à définir parmi les objectifs de fin de scolarité obligatoire des objectifs de fin de cycle 2 et 3 raisonnables. Ce que la loi a appelé les deux premiers palier**s** du socle.

Je vais donner un exemple, qui concerne les connaissances en numération.
Pour ce chapitre, le décret du 11 juillet 2006 fixe des éléments précis, lisibles dans la colonne de droite du tableau ci-dessous. Les deux premiers paliers énoncent des « sous ensembles » des ensembles de nombres à connaître à la fin de l'école obligatoire :

EN FIN DE CYCLE 2 (Palier 1)	EN FIN DE CYCLE 3 (Palier 2)	EN FIN DE SCOLARITÉ OBLIGATOIRE décret du 11 juillet 2006
Les élèves doivent connaître :	**Les élèves doivent connaître :**	**Les élèves doivent connaître :**
• **<u>pour ce qui concerne les nombres et le calcul</u>** - les nombres entiers jusqu'à 1000 : désignation orale et écrite (en chiffres et en lettres), ordre, comparaison.	• **<u>pour ce qui concerne les nombres et le calcul</u>** - les nombres entiers jusqu'à 1 000 000, les nombres décimaux (dont l'écriture décimale présente au plus trois chiffres après la virgule) : désignation orale et écrite, ordre, comparaison, - les fractions simples : $\frac{1}{10};\frac{1}{100};\frac{1}{1000};\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{3}{4}$,	• **<u>pour ce qui concerne les nombres et le calcul</u>** - les nombres décimaux, les nombres relatifs, les fractions, les puissances (ordonner, comparer),

Dans un deuxième temps, les objectifs ci-dessus ont été « opérationnalisés », c'est-à-dire que l'on a cherché, parmi les exigibles de fin de cycle listés dans les programmes, ceux qui semblaient indispensables pour les deux paliers du socle concernés. Par exemple, pour le palier 1, ont été retenus :

L'élève devra savoir

- lire, et écrire sous la dictée, en chiffres et en lettres, les nombres entiers jusqu'à 1000 ;

- interpréter la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture décimale d'un nombre ;

- dénombrer et réaliser des quantités en utilisant le comptage, un à un, ou des groupements ;

- produire des suites orales ou écrites de nombres de 1 en 1, de 10, en 10, de 100 en 100, à partir d'un nombre donné, dans les deux sens, et donner le successeur et le prédécesseur d'un nombre entier (non nul) ;

- comparer, ranger, encadrer des nombres (en particulier entre deux dizaines consécutives ou entre deux centaines consécutives) ;

- situer des nombres (ou repérer une position par un nombre) sur une ligne graduée de 1 en 1, de 10 en 10.

Il est bien entendu que le « programme », c'est-à-dire ce qui doit être enseigné, ne peut se réduire au socle.

D'une part, parce qu'élargir le champ de compétences travaillées permet de consolider, voire d'assurer la maîtrise de celles du socle. Dans tous les domaines, des compétences de plus haut niveau, des connaissances plus nombreuses, une technicité plus grande, une autonomie plus assurée, seront donc visées par les enseignants.
D'autre part, parce qu'apprendre demande du temps : pour assurer l'acquisition des compétences évaluées au palier $n+1$, il est nécessaire de commencer à les travailler dès l'étape précédente.
Et enfin, n'oublions pas que, dans toutes les classes, se trouvent des élèves qui ont un fort appétit d'apprendre et une forte capacité d'assimilation : l'enseignement doit rester ambitieux partout.
L'ensemble du programme doit donc demeurer un texte de référence pour les enseignants.
Et les exigibles de fin de cycle doivent rester des objectifs pour tous les élèves même si leur maîtrise n'est pas requise au titre du socle : c'est, par exemple, le cas pour l'ordre sur les nombres entiers naturels : même si le premier palier du socle n'évoque la connaissance et l'usage de la droite graduée que dans le cas où elle est graduée de 1 en 1 ou de 10 en 10, **tous** les élèves devront avoir rencontré au cycle 2 des situations de lecture ou de placement de nombres sur une droite graduée de 100 en 100 !

Parallèlement à ce travail de définition des paliers, avec autant de précision que possible – et souhaitable – une proposition de grille d'évaluation destinée au livret de l'élève a été construite. (« *Un livret personnel permettra à l'élève, à sa famille et aux enseignants de suivre l'acquisition progressive des compétences* » décret du 12 juillet 2006)

3. Le livret d'évaluation

La grille d'évaluation du pilier 3 a été l'objet d'une réflexion commune des quatre disciplines concernées : mathématiques, sciences de la vie et de la Terre, sciences physiques et technologie, et commune aussi aux niveaux concernés directement par le socle, c'est-à-dire le premier et le second degrés. Des inspecteurs généraux, des inspecteurs du premier et du second degrés, des enseignants, ont participé à ces travaux.
Le souci d'évaluer des savoirs « en acte » et non des seules connaissances formelles, mais de ne pas reléguer au second plan, pour autant, le long travail de compréhension et de mémorisation nécessaire à l'acquisition de ces connaissances, a amené le groupe à distinguer deux types de compétences selon leur degré de complexité :

- d'une part, celles qui consistent en l'assimilation et la restitution de connaissances ou de savoir-faire isolés, à travers des tâches simples clairement identifiées par la consigne : par exemple : restituer un résultat « par cœur », mais aussi lire ou écrire un nombre en écriture décimale, mener à bien un calcul isolé, convertir des mètres en centimètres…;
- d'autre part, celles qui consistent en la mobilisation en autonomie de ces compétences articulées entre elles, pour la résolution de problèmes ouverts, c'est-à-dire de problèmes pour lesquels l'ensemble de la démarche de résolution est laissée à l'initiative de l'élève.

Cette distinction entre maîtrise des savoirs et des techniques d'une part, et capacité à raisonner d'autre part, ne doit pas laisser à penser qu'elles s'acquièrent indépendamment les unes des autres. C'est bien entendu la nécessité de résoudre un problème qui doit motiver l'acquisition des connaissances, des modes de raisonnement, du sens des

opérations, des techniques. Et c'est aussi la résolution de problèmes qui contribuera à donner du sens aux nombres, aux opérations, aux grandeurs et à leur mesure.
Mais l'acquisition des techniques réclame aussi un travail systématique, quotidien. Travail systématique encore plus soutenu d'ailleurs avec les élèves les moins à l'aise en mathématiques, et auxquels la maîtrise des techniques donnera une certaine confiance en eux. Cette confiance en leur capacité à dominer leur technique leur facilitera la prise d'initiative au niveau du raisonnement. Ils seront plus libres d'imaginer une stratégie s'ils savent avoir à disposition les outils pour la mettre en œuvre. Et progressivement, à force de réussite, ils iront plus loin dans leurs raisonnements.

Je voudrais revenir plus précisément sur le rôle du calcul dans la formation mathématique des élèves, et sur celle de la résolution de problèmes.

4. Le rôle du calcul dans la formation de l'élève

La place du calcul en mathématiques et dans l'enseignement des mathématiques à l'école a été réaffirmée dans la circulaire du 8 mars 2007. S'il en est besoin, rappelons quelques arguments simples en faveur d'un apprentissage systématique et appuyé du calcul :

a. Le calcul est formateur de la mémoire : mémoire des résultats mais aussi mémoire des algorithmes, c'est-à-dire des enchaînements de techniques et de raisonnements, des stratégies.

b. La pratique du calcul accompagne la découverte puis une bonne appropriation des nombres et de leurs propriétés : les nombres se construisent et prennent sens, petit à petit, des premiers dénombrements de l'école maternelle aux décimaux du cycle 3. De l'addition des tout débuts aux divisions par 10 ou 100 du CM2, la pratique du calcul donne progressivement du sens aux premiers entiers, puis aux grands nombres, et aux décimaux. Plus tard, ce sont bien des problèmes de calcul qui nécessiteront l'introduction des rationnels puis des réels. Bien sûr, à l'inverse, la pratique du calcul nécessite une bonne connaissance des nombres et du sens de l'écriture décimale : les deux se développent conjointement, s'étayant mutuellement.

c. Le calcul est formateur du raisonnement : le choix d'un mode de calcul ou d'une stratégie nécessite une analyse préalable, la « consultation » automatisée ou non d'une banque mémorisée de résultats ou de techniques connues, l'articulation de plusieurs micro-raisonnements, la mise en œuvre de moyens de validation.
Une opération « standardisée » comme la division nécessite la mise en œuvre de véritables algorithmes, articulant le calcul mental ou posé de plusieurs multiplications et de soustractions.
Le calcul mental ou en ligne nécessite en général le recours non formalisé, après analyse, aux propriétés des opérations : **associativité de l'addition ou de la multiplication** [(12+57)+13 s'effectue plus rapidement si l'on pense à regrouper différemment : 12+(57+13)], **commutativité de ces opérations** [$2\times14\times5$ s'effectue plus facilement si l'on pense à changer l'ordre : $2\times14\times5 = 2\times5\times14 = 10\times14$], **distributivité de la multiplication sur l'addition** [6×112 c'est $(6\times100)+(6\times12)$, par exemple], ou sur **la soustraction** [19 c'est (20-1), et donc 5×19, c'est …], pour ne

citer que les plus importantes, mais d'autres, qui en dérivent, se construisent aussi, petit à petit.

Cette familiarisation informelle avec les propriétés des opérations (dont les noms n'ont pas à être connus) est préparatoire et nécessaire à l'acquisition au collège des règles du calcul algébrique qui ne sont, en fait, que la généralisation à tous les nombres des règles ci-dessus.

Le fameux $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ prendra d'autant plus facilement sens si les élèves y reconnaissent le 6×112 ou le 5×19 ci-dessus. Pour préparer au mieux leurs élèves à cet apprentissage, il est donc nécessaire que les maîtres du primaire les entraînent à repérer ces propriétés en situation et à jouer avec.

Comme on le voit, la plupart des calculs sont à leur niveau de véritables *problèmes*, dont la résolution articule prise d'information, choix et mise en œuvre d'une démarche.

d. Une certaine maîtrise des nombres et du calcul est indispensable dans la vie de tous les jours du citoyen : gestion de son budget, calculs de distances pour ses déplacements, calculs de surfaces ou de volumes pour son habitat, calculs de proportions en cuisine, etc.

e. Le calcul, enfin, est un outil indispensable à la pratique des autres sciences, qui font appel à lui presque systématiquement. Aujourd'hui, au collège comme au lycée, les enseignants de physique s'étonnent des difficultés des élèves lorsqu'il s'agit d'ajouter deux fractions, de calculer ou d'appliquer un pourcentage, de poser « de tête » une opération simple. Pour les élèves de collège, une malhabileté en calcul peut s'avérer un réel handicap, en mathématiques bien entendu mais aussi en sciences.

5. La résolution de problèmes

La résolution de problème est une tâche éminemment complexe, qui nécessite la mise en œuvre successive et éventuellement réitérée de compétences relevant de champs différents et qui ont été regroupées sous les rubriques suivantes :

a. rechercher et organiser l'information ;

b. engager une démarche, raisonner, argumenter, démontrer ;

c. calculer, mesurer, appliquer des consignes ;

d. communiquer à l'aide d'un langage mathématique adapté.

Il s'agit donc de prendre l'information utile, de penser et réaliser un traitement de l'information, et de communiquer ses résultats.

A titre d'exemple, prenons ce problème tiré d'un ouvrage d'ERMEL (cahier de l’élève, CE1, 1995):

Quatre enfants ont des billes :
- *Paul a 24 billes*
- *Pierre a 44 billes*
- *Jean a 30 billes*
- *Luc a 26 billes*

Ils veulent se les partager pour que chacun en ait autant. Combien de billes aura chaque enfant ?

Il n'y a qu'une seule question, pourtant les quatre types de compétences sont sollicités.

Voyons comment peuvent être décrites les différentes étapes nécessaires à la résolution de ce problème :

- comprendre les données et la question, se représenter la situation (dans sa tête, ou à l’aide d'un dessin, d'un schéma) ;

- concevoir une démarche permettant d'obtenir la réponse à la question posée. Il n'y a pas une seule démarche possible, et par exemple un élève ayant représenté les billes sur son cahier pourra raisonner à partir de ses dessins (quoique les nombres n'y incitent guère…), un autre pensera à mutualiser les compléments à 24, chaque enfant gardant déjà 24 billes (cela suppose qu'il ait d'abord eu l’idée de comparer les nombres de billes et ait réussi cette tâche), un autre encore plus familier des « grands » nombres ou doté d'une calculette, entreprendra l’addition des 4 nombres de billes, puis le partage du total à l’aide d'un raisonnement sur les nombres (nous ne sommes qu'en CE1, l’opération division n'est *a priori* pas mobilisable ; mais le problème peut aussi être proposé en cycle 3 après que la division a été introduite) ;

- exécuter les tâches nécessaires : dessins, comparaisons, additions, etc. On voit que ces deux dernières familles de tâches ne s'enchaîneront probablement pas linéairement ; des allers et retours entre raisonnement et réalisation seront en général nécessaires ;

- communication enfin du résultat, sous une forme appropriée, généralement implicite en fonction du vécu de la classe avec son maître. Des communications intermédiaires sont d'ailleurs envisageables, par exemple : *à eux tous, ils ont 124 billes*, ou *chacun garde déjà 24 billes*, selon la démarche utilisée. Certains dessins peuvent aussi témoigner d'étapes intermédiaires de la démarche et de résultats partiels.

Toute résolution de problème et en particulier de problème mathématique engage ces quatre familles de compétences, chacune à des degrés plus ou moins forts. Et la compétence générale « résoudre un problème » ne peut être considérée comme atteinte que si l'élève est capable d'articuler en autonomie ces quatre compétences.

Elles doivent donc être travaillées conjointement, par des exercices de résolution de problèmes ayant un degré approprié d'ouverture : l'élève doit en autonomie se saisir de l'énoncé, mettre en œuvre une démarche de résolution, et présenter ses résultats. Il ne s'agit pas pour le maître de lire et de commenter abondamment l'énoncé (ou de le faire faire par un élève…), de proposer une démarche (ou de le faire faire par un élève…), de donner le résultat (….).

Cet impératif d'autonomie, l'exigence que l'élève se saisisse seul du problème et le résolve, est ambitieux : il est nécessaire, car c'est ainsi que les problèmes se posent dans la vie et en mathématiques, et toutes les évaluations internationales montrent que nos élèves ne sont pas suffisamment habitués à cette manière de faire des mathématiques. Il appelle deux remarques :

Remarque 1 : le nécessaire travail conjoint des quatre compétences doit se faire dans le cadre d'une résolution de problème, car la difficulté particulière de la résolution de problème réside justement dans la complexité de la tâche, dans la nécessité de mobiliser des savoir-faire en autonomie, en les articulant. Travailler isolément les savoir-faire n'est donc pas pertinent dans ce contexte là. Mais le maître doit s'interroger sur le niveau de chacune des compétences à mobiliser pour résoudre le problème qu'il propose aux élèves : la prise d'information est-elle très facile ? « Classique » c'est-à-dire, déjà maintes fois rencontrée sous cette même forme ? Complexe ou difficile ? La démarche nécessaire a-elle déjà souvent été rencontrée ? Demande-t-elle beaucoup de prise d'initiative ? Peut-elle engager des opérations compliquées ? Les nombres en jeu sont-ils de taille « raisonnable » ? L'opération ou les opérations utiles en seront-elles rendues difficiles ? La communication du résultat risque-t-elle de poser problème ?

C'est en jouant sur le niveau de chacune de ces quatre compétences que le maître pourra faire alternativement travailler l'une ou l'autre, mais toujours dans le cadre d'une résolution de problème. Cela implique un travail d'analyse didactique des énoncés par le maître assez fin. Par ailleurs, la complexité de cette tâche (résoudre un problème) présentant en elle-même une difficulté certaine, la technicité visée doit rester modeste et dans tous les cas être progressive. Mieux vaut que l'élève sache résoudre seul un problème simple, plutôt qu'il soit capable de résoudre un « beau problème » avec l'aide des nombreux étais proposés par le maître ou par l'énoncé.

Reprenons l'exemple précédent. La complexité générale du problème, et la nécessité de mettre en œuvre deux opérations distinctes (dans le cas d'un traitement opératoire), pourraient inciter le maître à ajouter une question intermédiaire, comme :

« Combien de billes les enfants ont-ils à eux quatre ? ».

Bien entendu, cette question priverait les élèves de la possibilité d'une résolution par une première attribution de 24 billes à chacun des enfants et rendrait moins probable le recours au dessin ; les questions intermédiaires présentent d'ailleurs toujours ce défaut d'indiquer à l'élève la *bonne* méthode pour résoudre le problème. Mais surtout, cette question intermédiaire le priverait d'une prise en charge totale en autonomie du problème à résoudre ; elle ne lui permettrait en aucune façon de travailler la compétence générale « résoudre un problème », elle ne l'aiderait pas à prendre progressivement confiance en lui, en sa capacité de résoudre tout seul un problème.
Si le maître juge que ce problème est globalement « trop difficile » pour ses élèves, il lui faut en modifier l'énoncé pour

- soit abaisser le niveau de difficulté de la situation : ne garder que deux enfants, par exemple ; ou attribuer aux quatre enfants un nombre de billes beaucoup plus petit, qui facilite une représentation graphique ou le calcul (6, 2, 4 et 4 billes par exemple) ;
- soit abaisser le niveau de difficulté de la question : « Q*ui a le plus de billes ?* » ou bien « P*euvent-ils disposer de 30 billes chacun s'ils se mettent ensemble* ? », ces questions n'étant pas conçues comme des questions intermédiaires, mais comme « la » question d'un problème de niveau de difficulté inférieur.

Retenons que, **même si les problèmes proposés aux élèves ne comportent qu'une seule question, leur résolution met en œuvre au moins quatre compétences.**

L'analyse préalable de l'énoncé par le maître doit lui permettre d'anticiper les points de difficulté possibles, et de différencier, le cas échéant, l'aide qui pourrait s'avérer nécessaire pour certains élèves *après qu'ils auront déjà cherché seuls le problème, un moment suffisant.*
Il n'est pas évident de déterminer le moment où une aide s'avère nécessaire : chaque élève doit avoir le temps de chercher, de s'essayer, éventuellement de se tromper ; c'est en surmontant seul sa difficulté initiale qu'il progresse le plus. Mais pour autant, laisser trop longtemps des élèves en panne peut leur faire perdre confiance en eux et n'est pas productif. Or, tous les élèves n'ont pas obligatoirement la même ténacité pour chercher ; certains se découragent plus vite que d'autres : peut-être, peut-on inciter les élèves à demander eux-mêmes de l'aide lorsqu'ils en ressentent le besoin ?

Remarque 2 : l'évaluation de chacune de ces compétences doit aussi se faire dans le cadre d'une résolution de problème. Elle doit donc se faire de manière différenciée : les quatre compétences ayant été identifiées, la mise en œuvre de chacune, par l'élève, peut être réussie ou non. Une résolution de problème même simple n'est donc pas toujours unilatéralement « réussie » ou « non réussie » : il se peut que l'élève n'arrive pas au résultat parce qu'une seule des quatre compétences lui a fait défaut. La mise en œuvre réussie des trois autres doit être repérée et évaluée positivement.

Toujours dans l’exemple précédent, on peut très bien imaginer qu'un élève se trompe dans la réalisation des calculs : pour autant, les trois autres étapes de la résolution, si elles sont bien mises en œuvre, doivent être positivement évaluées.

Cette remarque appelle une question importante : faut-il exiger des élèves qu'ils laissent systématiquement une trace écrite de leur recherche ? Il est clair, qu'en cas de réponse erronée, la présence des traces de recherche peut aider non seulement à comprendre l’erreur et à l’analyser, mais aussi, dans le cadre d'une évaluation, à donner une évaluation positive de la démarche. Mais dans le cas d'une réponse exacte ? Pour reprendre l’exemple précédent, imaginons qu'un élève réponde : « chaque enfant aura 31 billes », sans autre explication. Que doit valider le maître ? Il semble bien que la démarche ait été bonne…..sans doute, convient-il que, sur ce point, le contrat avec la classe soit très explicite : laisser la trace des opérations, laisser les dessins utilisés, laisser les résultats intermédiaires, indiquer comment on a fait, etc.

6. Les autres domaines

Trois grands domaines sont absents de cet exposé : la géométrie, les grandeurs, et le domaine de l’information chiffrée, qu’au collège on appellera la statistique. Ils ne sont pas oubliés, et leur rôle dans la formation de l’élève et du citoyen n’est pas minoré.

La géométrie, principale branche des mathématiques pendant de nombreux siècles, est traditionnellement dans notre pays, en tant que discipline d’enseignement, un des moyens privilégiés de développer le raisonnement déductif. En outre, une certaine connaissance des bases de géométrie plane et des principaux solides nous est nécessaire dans notre vie quotidienne.

La connaissance des principales grandeurs et des systèmes de mesure, la capacité à estimer de telles mesures, sont évidemment nécessaires dans le cours de mathématiques comme dans presque tous les autres cours, et dans la vie.

Le traitement de l’information chiffrée, généralement rattaché aux mathématiques dites appliquées, est riche sur le plan des outils mathématiques qu’il utilise et qu’il a, pour certains, contribué à développer. Avec le développement de l’informatique, il a connu un essor spectaculaire. La connaissance des principaux outils, des principaux résumés, et de leur interprétation, est aujourd’hui indispensable.

Ces domaines sont donc évidemment présents dans le socle, au même titre que le domaine numérique. S’ils sont moins développés ici, c’est que notre séminaire porte sur le calcul et sur la résolution de problèmes.

7. Le socle, levier pour une évolution des pratiques des enseignants

L’apprentissage des mathématiques demande l’assimilation de connaissances et de techniques ainsi qu'un entraînement au raisonnement logique. Il n'y a pas lieu de dénigrer l’un ou l’autre de ces aspects de l’enseignement des mathématiques. En revanche, il y a lieu de les identifier clairement et de les travailler consciemment.

L’apprentissage de techniques, l’automatisation de certaines tâches, la mémorisation de résultats, sont indispensables. Pour des raisons intrinsèques (savoir effectuer très rapidement des calculs de la vie de tous les jours, par exemple, est une nécessité) mais aussi parce que cette automatisation libère l’esprit et lui donne la possibilité de s’atteler entièrement à d’autres tâches, plus abstraites, plus conceptuelles, plus difficiles, plus créatives.
Apprendre à raisonner, à devenir autonome dans la mise en œuvre de stratégies, à résoudre des problèmes dont l’énoncé n’est pas simple, à élaborer des stratégies de calcul, s’exerce aussi. L’accès à la complexité se travaille : c’est à l’enseignant de construire patiemment et progressivement, par des exercices bien choisis, l’autonomie de ses élèves devant des tâches de plus en plus complexes.

Les indications pour l’évaluation, proposées dans le livret de compétences, doivent engager les enseignants sur cette voie.

L’intelligence du calcul

Dominique Tournès, professeur des universités, IUFM de la Réunion, directeur de l’IREM de la Réunion

En lisant le rapport de l’inspection générale sur l’enseignement des mathématiques au cycle 3 [Durpaire *et al.* 2006], j’ai repéré, à propos du calcul, trois diagnostics qui serviront de fil directeur à mon exposé : la difficulté à articuler la résolution de problèmes et l’apprentissage méthodique des techniques de calcul, la constatation que le calcul mental et le calcul instrumenté sont négligés par les maîtres, la nécessité de revaloriser l’image du calcul en montrant que c’est une activité intelligente. Je crois que ce dernier mot résume l’essentiel : faute de percevoir l’intelligence du calcul, on a trop souvent tendance à le réduire à une activité pauvre, répétitive et sans âme. Tant chez les maîtres que dans la culture commune, le calcul est fréquemment considéré comme la partie la moins noble des mathématiques, celle qui, ne nécessitant pas de réflexion, peut être automatisée et éventuellement déléguée à une machine. Parfois même, comme le calcul est aussi la partie la plus visible des mathématiques, l’homme de la rue confond mathématiques et calcul, ce qui fait que ce sont les mathématiques dans leur ensemble qui sont perçues comme une activité sans intelligence. La situation est d’autant plus paradoxale que, de nos jours, le calcul est devenu omniprésent dans les pratiques scientifiques et sociales. Ne sommes-nous pas entrés dans l’ère du tout-numérique, c’est-à-dire un monde où tout, qu’il s’agisse de grandeurs physiques, de données qualitatives, de textes, d’images ou de sons, est représenté par des nombres et donne lieu à des traitements complexes portant sur ces nombres ? Ne parle-t-on pas d’« intelligence artificielle » pour marquer que les algorithmes de calcul toujours plus élaborés que nous implantons dans nos ordinateurs pourraient se rapprocher du mode de fonctionnement de notre cerveau ? Un tel contexte n’est sans doute pas étranger au fait que la place du calcul dans l’enseignement soit redevenue récemment un objet de débat.

C’est d’abord en historien que j’aborderai cette question de l’intelligence du calcul[4]. En effet, une approche historique et épistémologique nous apprend que, depuis toujours, le calcul a joué un rôle de premier plan dans le développement des mathématiques, tant pour la création de nouveaux concepts abstraits que dans l’application en retour des mathématiques à la réalité. Par ailleurs, le calcul a, de tout temps, été instrumenté par des technologies diverses et notre perception des objets mathématiques est intimement liée aux instruments que nous employons pour les calculer. Je crois qu’une telle analyse peut être utile pour faire évoluer les représentations des maîtres au sujet du calcul. Elle fournit notamment des éléments significatifs pour dépasser les oppositions calcul/raisonnement, calcul exact/calcul approché, calcul mental/calcul instrumenté, qui sont souvent pensées à tort comme des antagonismes et qui constituent autant d’obstacles à la mise en œuvre d’un enseignement cohérent des mathématiques.

[4] Pour préparer cette conférence, je me suis largement inspiré des travaux de Michèle Artigue sur le calcul, notamment des articles [Artigue 2004] et [Artigue 2005], et du rapport d’étape sur le calcul que la CREM (Commission de Réflexion sur l’Enseignement des Mathématiques) avait rédigé en 2001 et qui a été repris dans le chapitre 4 de [Kahane *et al.* 2002].

Le calcul dans la pratique des mathématiciens

Pour commencer, je vais évoquer rapidement la place que le calcul et ses instruments ont occupée – et occupent encore – au sein des mathématiques. On l'ignore souvent, mais les grands mathématiciens créateurs, comme Archimède, Newton, Euler ou Gauss, ont été, pour la plupart, de grands calculateurs et de grands expérimentateurs. Pour vous en convaincre, je vais prendre quelques exemples représentatifs depuis le XVIIe siècle. Ce sera à peu près le seul moment où je parlerai de mathématiques un peu plus savantes que celles que l'on étudie dans l'enseignement primaire, mais cela me semble indispensable à la cohérence et à la généralité de mon propos.

Entamons ce panorama avec Isaac Newton. Dans sa jeunesse, Newton s'est passionné pour la résolution des équations algébriques. Pour en rechercher les racines, il s'appuyait sur tous les moyens de calcul disponibles à son époque. En 1665, il écrit notamment que le calcul approché d'une racine *« peut se faire soit par des essais rationnels, soit par des essais logarithmiques comme l'a enseigné M. Oughtred, soit géométriquement par le tracé de lignes, soit avec un instrument, qui peut être rectangulaire ou mieux circulaire, consistant en quatre ou cinq échelles de nombres coulissant les unes par rapport aux autres »*[5]. En d'autres termes, ce calcul pouvait être numérique ou graphique, et se faire soit directement avec les outils traditionnels, soit à l'aide d'instruments qui étaient alors nouveaux (les tables de logarithmes et la règle à calcul). Dans le *Waste Book* de Newton (son cahier de brouillon), on découvre des pages et des pages de gigantesques calculs exploratoires, comme, par exemple, un calcul de l'aire sous l'hyperbole qui le conduit à déterminer des logarithmes avec 55 décimales. Par ces longs et fastidieux calculs, Newton s'est approprié la tradition algébrique de ses prédécesseurs arabes et européens, a analysé leurs algorithmes et les a étendus des équations numériques aux équations littérales et aux équations fonctionnelles, en particulier aux équations différentielles. L'idée de base de la technique utilisée est d'effectuer les opérations littérales de l'algèbre à l'aide des séries infinies, de la même façon qu'on effectue les opérations numériques de l'arithmétique au moyen des fractions décimales. Une réflexion en profondeur sur les anciennes méthodes de division, d'extraction des racines carrées et cubiques, plus généralement de calcul des chiffres successifs d'une racine d'une équation numérique, a conduit Newton à imaginer un processus analogue pour les équations fonctionnelles : la fonction inconnue est cherchée sous la forme d'une série de puissances de la variable indépendante, et les termes successifs de la série sont extraits un à un. Grâce à ces calculs audacieux, le « calcul des fluxions », qui contient les fondements du calcul infinitésimal, est né en 1669. Quelques années plus tard, Newton n'a pas, contrairement à la légende, trouvé la loi de l'attraction universelle en regardant tomber les pommes : bien au contraire, ce résultat théorique est le fruit de longues et fastidieuses explorations numériques et graphiques, qui ont duré plusieurs années, qui ont fait l'objet d'un débat permanent entre Newton et d'autres savants anglais, en particulier Hooke et Halley, et qui ont consisté à tester diverses lois de forces centrales jusqu'à identifier celle qui rendait compte correctement du mouvement elliptique des planètes décrit par les trois lois de Kepler. C'est donc une pratique constante et intelligente du calcul numérique, une extension et une adaptation des techniques opératoires sur les nombres, qui ont permis à Newton de concevoir sa méthode des séries infinies, son calcul infinitésimal et sa théorie de l'attraction universelle. En retour, ces outils théoriques ont permis d'étudier de nouvelles courbes, de traiter les problèmes de quadratures et de tangentes, et de résoudre les équations différentielles. Il en est résulté un développement foudroyant de l'analyse mathématique, de la mécanique céleste et des sciences physiques.

---

[5] *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, D. T. Whiteside (ed.), vol. 1, Cambridge, University Press, 1967, p. 489 (c'est moi qui traduis ce passage).

Le deuxième exemple que j'ai choisi est celui de Carl Friedrich Gauss, surnommé le « prince des mathématiciens ». Gauss était directeur de l'observatoire astronomique de Göttingen. Dans ses travaux d'astronomie et de géodésie, il était régulièrement confronté à des systèmes linéaires ayant un grand nombre d'équations. Il est courant, dans ce type de situation, de disposer de davantage de mesures expérimentales que de quantités indéterminées. Par exemple, il suffit de trois observations pour déterminer l'orbite d'une comète, mais, en général, on en fait beaucoup plus dans l'espoir d'améliorer la précision, ce qui conduit, compte tenu des erreurs de mesure, à un système incompatible ayant davantage d'équations que d'inconnues. C'est pour traiter de manière optimale un tel système que Gauss, en 1819, a mis au point la « méthode des moindres carrés », qui consiste à minimiser la somme des carrés des erreurs pour la structure euclidienne. Par ailleurs, à cette époque, un problème essentiel du calcul numérique était de résoudre efficacement les grands systèmes linéaires ayant autant d'équations que d'inconnues. Les formules construites par Gabriel Cramer en 1750, donnant la valeur de chaque inconnue sous la forme d'un quotient de deux déterminants, ne sauraient être utilisables dans ce contexte, car le nombre d'opérations arithmétiques à effectuer devient prohibitif au-delà de trois ou quatre équations. Il fallait impérativement trouver de nouveaux algorithmes. Dans un mémoire de 1810 sur l'orbite de l'astéroïde Pallas, Gauss publie la procédure d'élimination connue aujourd'hui sous le nom de « méthode du pivot de Gauss ». L'idée générale est de se ramener progressivement à un système triangulaire, sachant qu'un tel système est facile à résoudre en remontant ligne par ligne à partir de la dernière équation. Un peu plus tard, en 1818, Gauss est chargé d'un programme de triangulation de l'état du Hanovre utilisant une chaîne de 26 triangles. Il se trouve soudain confronté à des systèmes linéaires énormes pour lesquels la méthode du pivot devient elle-même impraticable. Dans une lettre à Christian Ludwig Gerling de 1823, Gauss propose alors une méthode itérative afin d'accélérer les calculs. Sans entrer dans les détails, ce que fait Gauss consiste à déterminer une première valeur approchée de la solution et à la corriger en utilisant une équation à point fixe jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de différence sensible entre deux valeurs successives. Le même algorithme sera redécouvert de manière indépendante en 1874 par Ludwig Seidel, un astronome qui avait à résoudre des systèmes de 72 équations pour étudier la luminosité des étoiles, d'où le nom aujourd'hui en usage de « méthode de Gauss-Seidel ». En définitive, c'est une réflexion intelligente sur le calcul numérique, une analyse fine de ses insuffisances et la recherche d'algorithmes plus performants qui ont permis à Gauss de créer des outils théoriques comme la méthode des moindres carrés, la triangulation des endomorphismes ou la méthode des approximations successives. Ces outils ont eu par la suite des retombées très importantes en algèbre linéaire, en analyse numérique et en probabilités-statistiques.

Le troisième et dernier exemple sera celui d'un mathématicien contemporain : Alain Connes, médaille Fields en 1982 et professeur au Collège de France depuis 1984. Ses recherches portent sur la géométrie non commutative et ses applications à la mécanique quantique. Alain Connes se définit lui-même comme un mathématicien platonicien. Il s'intéresse à des objets idéaux extrêmement abstraits. Est-ce à dire qu'il ne fait jamais appel au calcul ? Contrairement à ce que l'on pourrait croire, ses avancées les plus théoriques sont précédées de gigantesques explorations calculatoires, comme il le raconte lui-même à propos de l'une de ses découvertes[6] : *« L'astuce de la matrice 2 fois 2 m'est apparue par hasard dans un éclair, mais parce que le terrain avait été préparé par des tonnes et des tonnes d'exemples, des tonnes et des tonnes de calculs. Mon impression est que je n'ai jamais rien obtenu à faible*

[6] Interview with Alain Connes, *Newsletter of the European Mathematical Society*, 63 (2007), p. 27 (c'est moi qui traduis ce passage).

coût. Tous mes résultats ont été précédés par des résultats préparatoires – mise en place du travail, très longue expérimentation – avec l'espoir qu'à la fin de cette expérimentation, une idée incroyablement simple allait surgir pour résoudre le problème. [...] *J'ai passé tout l'été 2006 à vérifier une formule qui fournit le couplage du modèle standard avec la gravitation* [...]. *Le calcul est monumental : dans le modèle standard, il y a quatre pages de termes avec les coefficients 1/8, 1/4, des sinus et des cosinus de l'angle de Weinberg... et tant que vous n'avez pas tout vérifié avec tous les coefficients, vous ne pouvez pas affirmer que le calcul donne le bon résultat* ». Ce témoignage donne assurément une bonne idée du quotidien d'un chercheur en mathématiques.

Ces trois exemples choisis dans trois siècles différents devraient suffire pour se convaincre qu'il n'y a pas de mathématiques sans calcul. En particulier, le calcul est omniprésent dans les phases de découverte, lorsqu'il s'agit d'explorer de nouvelles situations en examinant de nombreux cas particuliers. Par ailleurs, de nombreux objets mathématiques ne sont pas définis autrement que par les algorithmes qui permettent de les calculer et qui assurent, de ce fait, leur existence : par exemple, comme on le découvre actuellement en première et terminale, une courbe intégrale d'une équation différentielle est la limite des lignes polygonales obtenues par la méthode d'Euler.

Les origines et l'extension du calcul

Après avoir mis en évidence l'importance du calcul, essayons de préciser d'où il vient et en quoi il consiste. Le terme « calcul » dérive du mot latin « *calculus* » qui renvoie aux cailloux que les Romains utilisaient pour compter, et par extension aux boules, jetons ou pions qui ont été un peu partout des auxiliaires usuels des opérations commerciales et financières. D'ailleurs, bien avant les Romains, les Babyloniens utilisaient également des cailloux, les premières traces de comptage étant contemporaines de l'invention de l'écriture vers 3000 ans avant J.-C. Fort de cette origine, le mot « calcul » est le plus souvent associé aux calculs élémentaires sur les nombres intervenant dans le dénombrement de quantités discrètes (calcul sur les nombres entiers) et dans la mesure des grandeurs (calcul sur les fractions et sur les nombres décimaux, voire sur d'autres types de nombres lorsqu'on emploie d'autres systèmes de numération, comme le système babylonien de base 60 qui a laissé des traces jusqu'à nos jours dans la mesure du temps et des angles). En outre, quand on parle de calcul dans ce contexte, on sous-entend toujours des procédures, des algorithmes, des instruments qui permettent d'automatiser, au moins en partie, les opérations sur les nombres.

Plus généralement, calculer, c'est combiner des symboles suivant des règles déterminées. De ce point de vue, le calcul comprend deux aspects : concevoir un algorithme (autrement dit, choisir et ordonner les opérations à effectuer pour arriver à la solution d'un problème) et exécuter l'algorithme. Calculer, c'est finalement remplacer des tranches de raisonnement par des manipulations formelles de symboles [Rouche 2007]. C'est oublier momentanément le sens de ce que l'on fait pour acquérir de la rapidité et de l'efficacité, notamment lorsqu'une même tâche doit être répétée un grand nombre de fois. C'est pour cela que le calcul occupe une place très générale en mathématiques. Quasiment toutes les théories mathématiques cherchent à codifier certaines de leurs parties pour les transformer en un « calcul » automatique qui libère l'esprit. On parle ainsi de calcul barycentrique, calcul vectoriel, calcul tensoriel, calcul matriciel, calcul algébrique, calcul différentiel, calcul intégral, calcul des variations, calcul des probabilités, calcul propositionnel, calcul des prédicats, calcul formel, etc. La liste seule de ces expressions prouverait à nouveau, s'il en était besoin, l'importance du calcul au sein des mathématiques. Le travail qui sera fait à l'école primaire sur le calcul numérique élémentaire conditionnera donc, dans une large mesure, la perception que les élèves auront ultérieurement des mathématiques dans leur ensemble.

La réduction du raisonnement et de la résolution de problèmes au calcul est une constante de l'activité mathématique. Par exemple, Descartes et Fermat ramènent la géométrie d'Euclide à des calculs dans un système de coordonnées et l'étude des courbes à celle de leurs équations. Un peu plus tard, Newton et Leibniz ramènent les problèmes de longueurs, d'aires, de volumes et de centres de gravité à des calculs de primitives. Ainsi, la géométrie analytique et le calcul infinitésimal permettent de traiter systématiquement et de façon routinière de larges classes de problèmes là où, auparavant, il fallait, comme le faisait Archimède, inventer une méthode particulière pour chaque situation. Si le calcul évite souvent d'avoir à penser, en contrepartie, il atteint vite ses limites. Il est long, fastidieux, parfois inextricable. Aussi, inversement, un autre courant des mathématiques tend à remplacer le calcul par des raisonnements abstraits portant sur des objets de niveau supérieur. Pour reprendre l'exemple de la géométrie analytique, cette théorie, si prometteuse au départ, a buté rapidement sur l'obstacle de systèmes d'équations difficiles à résoudre ou dont la solution était difficile à interpréter. Cela a donné naissance à l'algèbre linéaire, une nouvelle façon synthétique d'aborder certains problèmes en évitant les calculs sur les coordonnées. Mais l'algèbre linéaire, à son tour, a engendré des calculs : le calcul vectoriel, le calcul matriciel ou le calcul barycentrique, qui ont permis à nouveau de remplacer certains raisonnements par des procédures automatiques. Les mathématiques sont ainsi une dialectique permanente entre deux tendances : d'un côté, remplacer les raisonnements par des calculs, de l'autre côté, remplacer les calculs par des raisonnements.

Pensée algorithmique et pensée déductive

Ce rôle essentiel du calcul au sein des mathématiques n'est pas toujours bien compris. À cela, il y a des raisons historiques et idéologiques profondes. Tout d'abord, dans notre inconscient collectif, les mathématiques sont plus ou moins assimilées au raisonnement hypothético-déductif qui nous vient de la géométrie grecque. Dans l'iconographie, dans la peinture, quand on représente un mathématicien, il s'agit le plus souvent de quelqu'un qui fait de la géométrie, quelqu'un qui tient à la main une règle ou un compas. Pendant longtemps, le mot « géomètre » a été synonyme de « mathématicien ». Dans une telle vision des mathématiques, que l'on fait remontrer exclusivement au fameux « miracle grec », on oublie un autre courant de pensée qui a joué un rôle historique tout aussi important. C'est le courant numérique et algorithmique venu des civilisations d'Orient. Depuis l'Antiquité, que ce soit à Babylone, en Égypte, en Inde ou en Chine, la résolution de problèmes se faisait, en général, grâce à des procédures algorithmiques trouvées à l'issue d'une longue pratique de calcul et le principal mode de raisonnement consistait à prouver la correction de ces algorithmes.

Au Moyen-Âge, le monde arabe, qui se trouvait au carrefour de toutes les civilisations précédentes, s'est chargé de transmettre et de développer considérablement cette pensée algorithmique. Dans les années 770, le calife al-Mansur avait fait venir à Bagdad des savants indiens qui avaient apporté avec eux les traités les plus importants de l'astronomie et des mathématiques indiennes. Dans ces traités, se trouvaient entre autres les chiffres indiens, la numération décimale de position avec le zéro, et des techniques très élaborées de calcul numérique. Le personnage essentiel qui a contribué à la diffusion de ces connaissances vers l'Occident est le Persan al-Khwarizmi, qui a vécu dans la première moitié du IX^{e} siècle. Ce savant est surtout resté célèbre pour deux de ses ouvrages. Le premier, *Al jabr wa'l muqabala* (*Livre de la transposition et de la réduction*) contient les principes de la science algébrique et c'est son titre qui a donné le mot « algèbre ». Le second, intitulé *Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens*, n'est connu que par des traductions latines. C'est le plus ancien livre arabe conservé où la numération décimale de position et les méthodes de calcul d'origine indienne font l'objet d'explications détaillées. L'ouvrage deviendra si fameux que le nom de son auteur, transformé en « algorithme », désignera le calcul indien avant de prendre le sens plus général que nous lui connaissons aujourd'hui. L'arrivée en Europe du calcul indien écrit et de l'algèbre arabe a entraîné le développement rapide des sciences à partir de la Renaissance. À ce propos, on a déjà évoqué plus haut comment la pleine assimilation de ces nouveaux outils, notamment par Descartes et Newton, avait fortement contribué à l'apparition de la géométrie analytique, du calcul infinitésimal et de la physique mathématique.

Comme je le disais, notre inconscient collectif reste marqué par cette histoire. Pour nous, les mathématiques s'identifient encore souvent à la pensée axiomatico-déductive grecque. Nous refusons d'y intégrer positivement la pensée algorithmique orientale, pourtant si féconde et si présente dans toute activité mathématique. Jusqu'à une époque récente, cela s'est traduit fortement dans l'historiographie de notre discipline. Ouvrez un livre d'histoire des mathématiques : sauf exception, vous verrez qu'on n'y parle presque pas de calculs et d'algorithmes, encore moins d'instruments de calcul. Heureusement, les historiens ont entrepris un gros effort depuis une quinzaine d'années pour rééquilibrer cette vision tronquée en redonnant une juste place à la composante algorithmique des mathématiques (cf. par exemple [Chabert *et al.* 1994]). Cela a été facilité par l'essor de l'informatique et de l'analyse numérique, et par le renouveau des mathématiques appliquées que l'on observe depuis le milieu du XX^e^ siècle. Au niveau de l'enseignement, des efforts analogues restent sans doute à accomplir pour modifier en profondeur les représentations des maîtres à propos du calcul et de ses instruments.

Les instruments anciens du calcul

Parlons justement un peu de ces instruments qui posent problème à beaucoup d'enseignants. Le calcul a toujours été outillé par des instruments très variés. Il convient naturellement de mettre à part le calcul mental, seul mode de calcul qui n'utilise aucun instrument autre que nous-mêmes et qui, en ce sens, est indissociable du calcul sur les doigts. C'est aussi le seul mode de calcul qui soit disponible immédiatement et universellement. Par opposition, les autres techniques sont toutes du calcul instrumenté nécessitant un matériel spécifique. De plus, il ne faut pas croire que le choix d'un instrument particulier comme support courant du calcul soit anodin : bien au contraire, ce choix conditionne fortement notre façon de penser les nombres et, par voie de conséquence, notre conception des mathématiques dans leur ensemble. À ce titre, il est intéressant de passer en revue les principaux changements de support qui se sont produits dans l'histoire.

En Chine, les baguettes à calculer, que l'on dispose sur une planche de bois quadrillée (une sorte d'échiquier), apparaissent vers le II^e^ siècle avant J.-C. et sont d'un usage courant jusqu'au XIII^e^ siècle après J.-C. Ce support à deux dimensions permet le développement de calculs complexes : résolution de systèmes d'équations linéaires (on rencontre la méthode du pivot de Gauss dès le I^er^ siècle avant J.-C.) et d'équations polynomiales à une ou plusieurs inconnues. Lorsque le boulier apparaît, vers le XIII^e^-XIV^e^ siècle, il se révèle beaucoup plus pratique pour les calculs courants des commerçants et artisans, à savoir les quatre opérations, et il l'emporte face aux baguettes à calcul. Mais ce changement de support entraîne une régression de la pratique mathématique de haut niveau : le boulier, instrument linéaire, ne permet pas de calculer simultanément sur plusieurs nombres disposés en tableau. Il faut peut-être voir là l'une des raisons pour lesquelles la mathématique chinoise n'a plus rien créé de nouveau à partir du XIV^e^ siècle.

En Occident, les calculateurs avaient hérité de l'époque romaine la pratique des calculs sur l'abaque à jetons, un instrument analogue au boulier. En effet, les chiffres romains se prêtent difficilement au calcul : ils servent seulement à écrire les nombres, en aucun cas à opérer sur eux. Vers le XII^e^ siècle, au retour des croisades et à la suite de contacts avec les Arabes d'Espagne et d'Afrique du Nord, la technique du calcul indien avec les chiffres arabes et le zéro est ramenée d'Orient. Les savants européens – au premier rang desquels il faut mentionner Léonard de Pise, dit Fibonacci – adoptent avec enthousiasme le nouveau calcul écrit qui va favoriser l'envol des mathématiques en Occident. Par contre, les commerçants et les banquiers continuent à utiliser l'abaque à jetons. La querelle est vive entre les abaquistes (tenants de l'abaque) et les algoristes (tenants du calcul écrit). Elle se prolonge jusqu'à la fin du XVIII^e^ siècle. Ainsi, il s'est passé à peu près le contraire de la Chine : au début, un support inadapté qui a stérilisé les mathématiques occidentales pendant tout le Moyen-Äge et jusqu'à la Renaissance, puis un support efficace qui a permis, dans la lignée des mathématiques arabes, le développement foudroyant de l'algèbre, puis du calcul infinitésimal.

Il me semble important de revenir un peu sur l'abaque à jetons – et sur sa version asiatique qu'est le boulier –, car c'est sans doute l'instrument de calcul qui a été le plus longtemps et le plus massivement utilisé dans l'histoire. Il a prédominé depuis l'Antiquité jusqu'au XVIII^e^ siècle en Occident, et jusqu'à nos jours en Orient, où son emploi commence à peine à décliner. La caractéristique principale de tous les abaques à jetons est le fait, reconnu par des spécialistes de tous horizons, que l'œil et le cerveau humains ne peuvent pas dénombrer globalement plus de quatre objets [Schärlig 2006]. Pour ne pas avoir à discerner et à manipuler plus de quatre jetons à la fois, on recourt naturellement à des groupements intermédiaires par cinq, bien que l'on calcule dans un système décimal. Voilà pourquoi il y a, sur le boulier chinois ou le soroban japonais, des boules de 5, de 50, de 500, etc. Le même phénomène trouve sa traduction dans de nombreuses numérations anciennes comme la numération romaine, où les chiffres I, II, III et IIII sont suivis de V, puis de VI, VII, etc. D'une certaine manière, ces numérations et ces instruments à base décimale et à sous-base quinaire sont parfaitement adaptés à notre physiologie, à la fois au fait que nous ayons dix doigts et au fait que nous ne puissions pas dénombrer plus de quatre objets d'un seul coup d'œil. De là, viennent probablement leur succès universel et leur extrême longévité.

Il faut aussi prendre conscience que, en Europe jusqu'au XVIII^e^ siècle, très peu de gens savaient compter, ce qui met en évidence les progrès accomplis par nos systèmes éducatifs et relativise les invectives de ceux qui proclament en permanence que « le niveau baisse ». Michel de Montaigne, qui appartenait pourtant à un milieu cultivé, avoue dans ses *Essais*[7] : *« Or je ne sçay conter ny à get, ny à plume »*, c'est-à-dire ni avec l'abaque à jetons, ni avec le calcul écrit. Le calcul avec les jetons était surtout l'apanage des commerçants et des banquiers. Si, en Angleterre, le ministre des finances s'appelait – et s'appelle encore – le « Chancelier de l'Échiquier », c'est parce que « *exchequer* » était le mot anglais pour l'abaque. L'apprentissage de l'abaque était laborieux, seuls quelques maîtres allant jusqu'à la division et à l'extraction des racines carrées ou cubiques. Dans les milieux aisés, on pouvait toutefois s'en servir pour des comptes simples. M^me^ de Sévigné, dans une lettre à sa fille du 10 juin 1671, écrit : *« Nous avons trouvé, avec ces jetons qui sont si bons, que j'aurais eu cinq cent trente mille livres de bien, en comptant toutes mes petites successions »*. En 1674, Molière commence *Le malade imaginaire* par ces mots : *« Argan, seul dans sa chambre assis, une table devant lui, compte des parties d'apothicaire avec des jetons ; il fait parlant à lui-même les dialogues suivants. — Trois et deux font cinq, et cinq font dix, et dix font vingt. »* Dans ces mots, on reconnaît immédiatement les manipulations typiques des jetons sur l'abaque : groupement par cinq, puis par dix.

[7] Les citations de ce paragraphe sont tirées de [Schärlig 2003].

Le calcul à la plume, quant à lui, était surtout l'affaire des mathématiciens, notamment des astronomes qui avaient à effectuer des calculs gigantesques et qui, à partir du XVII^e siècle, se sont servis, en plus, des tables de logarithmes afin de remplacer les multiplications et les divisions de grands nombres, si coûteuses en temps et en énergie, par des additions et des soustractions. Le calcul à la plume est un calcul instrumenté particulier, qui tend à se passer du support de l'abaque ou du boulier en notant sur le papier, de manière symbolique, les manipulations à effectuer. On en retrouve la trace dans l'alignement des chiffres dans des colonnes fictives mimant celles de l'abaque, dans la décomposition des opérations en opérations partielles mettant séparément en jeu les différents chiffres des nombres, et dans les échanges que l'on effectue : échange de dix unités pour une dizaine qui se traduit par une retenue, échange inverse d'une dizaine pour dix unités afin de rendre possible une soustraction ou une division, etc. D'ailleurs, de nombreux algorithmes anciens de multiplication et de division, dans lesquels on écrit et biffe successivement les résultats partiels intermédiaires, gardent mieux que les nôtres le souvenir de ces manipulations concrètes, et certaines études semblent montrer qu'ils seraient mieux adaptés à l'apprentissage réfléchi des opérations chez les enfants. Par exemple, écrire explicitement toutes les multiplications et toutes les soustractions lorsque l'on effectue une division sur des nombres est sans aucun doute l'idéal pour comprendre ce que l'on fait, tout en préparant efficacement la division euclidienne des polynômes que les élèves rencontreront plus tard.

Nouveaux changements de support

Dès le XVII^e siècle, quelques esprits visionnaires songent d'ailleurs déjà à automatiser le calcul digital pour remplacer à la fois la plume et les jetons. En 1645, Blaise Pascal, dans son *Avis à ceux qui auront la curiosité de voir la machine arithmétique et de s'en servir*, dit à son lecteur[8] : *« Je te prie d'agréer la liberté que je prends d'espérer que la seule pensée à trouver une troisième méthode pour faire toutes les opérations arithmétiques, totalement nouvelle et qui n'a rien de commun avec les deux méthodes vulgaires de la plume et du jeton, recevra de toi quelque estime et qu'en approuvant le dessein que j'ai eu de te plaire en te soulageant, tu me sauras gré du soin que j'ai pris pour faire que toutes les opérations, qui par les précédentes méthodes sont pénibles, composées, longues et peu certaines, deviennent faciles, simples, promptes et assurées »*. Par là, Pascal anticipait le nouveau changement de support que nous sommes en train de vivre actuellement, celui qui nous fait passer rapidement du calcul indien écrit au calcul sur une calculatrice électronique. On peut d'ailleurs remarquer que les peuples asiatiques sont en train de passer directement de l'ère du boulier à l'ère de la calculatrice électronique, sans avoir connu, sinon de façon marginale, celle du calcul écrit. En Europe, comme nous l'avons dit, c'est seulement vers la fin du XVIII^e siècle que le calcul écrit s'est imposé. Cependant, dans l'école de Jules Ferry, les enfants ont été souvent initiés au calcul, dès la maternelle, par le moyen de l'abaque, qui est ainsi resté vivant jusqu'à nos jours en tant qu'outil pédagogique transitoire. Globalement, le calcul avec les jetons aura duré plus de deux mille ans, tandis que le calcul à la plume se sera imposé pendant à peine deux cents ans dans une seule moitié de l'humanité. Cela doit relativiser l'importance que l'on accorde au calcul posé dans l'enseignement. L'essentiel réside dans de bonnes compétences en calcul mental associées à une utilisation efficace de l'outil d'aujourd'hui qu'est la calculatrice. Il n'est pas *a priori* indispensable d'atteindre une haute maîtrise du calcul posé pour faire des mathématiques. Gottfried Wilhelm Leibniz, qui était certainement un très grand mathématicien puisqu'il a inventé le calcul infinitésimal indépendamment de Newton,

[8] Pascal, *Œuvres complètes*, Bibliothèque de la Pléiade, Paris : Gallimard, 1954, p. 358.

comptait avec les jetons, ainsi que l'attestent plusieurs témoignages et le passage suivant de ses écrits[9] : *« Il est cependant très vrai que l'abus des mots est une grande source d'erreurs, comme si en calculant on ne marquoit pas bien la place du jetton* [...] *»*. S'il reste utile d'étudier le calcul posé, ce n'est pas tellement pour en faire un instrument usuel, mais plutôt parce qu'il permet une réflexion en profondeur sur les nombres, renforce le sens des opérations et prépare efficacement l'étude des structures algébriques. Comme chez Newton, l'apprentissage raisonné des règles formelles de calcul sur les puissances de 10, avec emploi systématique de la décomposition décimale des nombres et de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, constitue un préalable avantageux à la maîtrise ultérieure du calcul littéral.

En parallèle des instruments digitaux que nous venons d'évoquer, il y a eu aussi, surtout à partir du milieu du XIX^e^ siècle, le développement d'instruments analogiques dans lesquels les nombres étaient représentés par des grandeurs géométriques, en général des longueurs de segments. Le plus populaire de ces instruments fut incontestablement la règle à calcul, qui a équipé tous les ingénieurs, tous les scientifiques et tous les lycéens jusque dans les années 1970. La règle à calcul est l'équivalent graphique des tables de logarithmes. Sur ses échelles graduées les plus simples, les multiplications de nombres sont réalisées en tant qu'additions de longueurs. À côté de la règle à calcul, on utilisa des quantités d'autres tables graphiques de calcul, qu'on appelait aussi des « abaques » ou, plus récemment, des « nomogrammes ». Ces tables graphiques sont toujours d'emploi courant dans certains secteurs industriels et sont encore enseignées dans certaines séries techniques et professionnelles.

Je crois qu'il est important pour les maîtres de prendre conscience de cette évolution permanente des outils du calcul, afin de ne pas se figer sur des pratiques du passé et de permettre aux enfants de s'approprier au mieux les outils de leur temps. Tout changement s'accompagne naturellement de réticences tenaces et de douloureuses remises en question. Ce n'est pas nouveau. Dans son *Livre pour les maîtres d'écoles*, al-Jahiz, au IX^e^ siècle, donnait ce conseil qui fait facilement deviner les polémiques consécutives à l'arrivée des chiffres indiens[10] : *« Il paraît judicieux d'engager l'élève dans l'étude du calcul digital, à l'exclusion de l'arithmétique indienne »*. Un peu plus tard, le Persan as-Suli, dans un traité destiné aux scribes et aux calculateurs, écrit : *« Les scribes de l'administration évitent cependant d'utiliser ces chiffres, parce qu'ils exigent l'emploi d'un matériel* [à savoir la planchette à calcul]*, et ils estiment qu'un système qui n'en nécessite pas et que l'on peut pratiquer sans autre moyen qu'un membre de son corps est plus propre à assurer le secret et est plus conforme à la dignité de chef »*. Ferdinand Buisson, dans son *Dictionnaire pédagogique* de 1887, stigmatisait quant à lui l'emploi du boulier[11] : *« Le boulier corrompt l'enseignement de l'arithmétique.* [...] *La nature a donné aux enfants leurs dix doigts pour boulier ; au lieu de leur en donner un second, il faut leur apprendre à se passer du premier »*. Enfin, le fabricant de règles à calcul Aristo, dans un bulletin publié en 1971 à destination des enseignants, prévenait : *« Pour le professeur formé aux rigueurs de la discipline mathématique, l'introduction de la règle à calcul dès les classes moyennes peut poser un vrai cas de conscience »*. Dans la même veine, on pourrait facilement dénicher de nombreuses citations récentes pour tirer à boulets rouges sur l'emploi des calculatrices à l'école primaire.

[9] Citation tirée de [Schärlig 2003].
[10] Cette citation et la suivante sont tirées de [Ifrah 1994].
[11] Cette citation et la suivante sont tirées de [Trouche 2005].

Les technologies actuelles du calcul

Actuellement, nous sommes en train de vivre un changement de support comparable au précédent : de même que l'abaque à jetons a été supplanté par le calcul indien écrit, ce dernier est en voie de s'effacer au profit du calcul sur calculatrice. Le calcul écrit a déjà totalement disparu pour l'extraction des racines carrées et cubiques, et quasiment disparu pour la division que, une fois passées les années d'école et de collège, plus personne n'effectue à la main. À un plus haut niveau, le calcul algébrique papier-crayon est remplacé par les logiciels de calcul symbolique, et les figures de géométrie papier-crayon-règle-compas par les logiciels de géométrie dynamique. Signalons également l'importance croissante du tableur, qui a été conçu à l'origine pour des calculs comptables et financiers, mais dont l'utilité est vite apparue pour toutes sortes de calculs mathématiques et statistiques. Notons au passage que, par une sorte d'ironie de l'histoire, le tableur n'est finalement rien d'autre qu'un avatar moderne des anciens abaques, échiquiers et autres tables de compte. De façon générale, la puissance des nouveaux outils modifie profondément l'économie du calcul. En favorisant explorations, expérimentations et simulations, elle renouvelle aussi notre façon de gérer les rapports entre calcul et raisonnement. On peut débattre de l'opportunité et de la manière d'utiliser les outils modernes de calcul, mais on ne peut nier le fait que leur existence et leur diffusion massive dans tous les secteurs de la société posent la question de leur impact sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dès le plus jeune âge. En dehors de l'école, un enfant d'aujourd'hui ne voit plus personne utiliser le calcul écrit. Il peut légitimement s'interroger sur la pertinence de ce qu'on lui apprend. Par ailleurs, le devoir de l'école est de préparer cet enfant à utiliser efficacement les outils d'aujourd'hui, ceux qu'il aura réellement à utiliser dans sa vie sociale et professionnelle, à savoir la calculatrice et le tableur.

C'est précisément via les calculatrices et les tableurs, éventuellement via des logiciels mathématiques plus spécialisés, que s'expriment et se développent de façon privilégiée les rapports entre les mathématiques et les autres secteurs scientifiques, entre les mathématiques et le réel. Cela est d'autant plus vrai que de nombreux systèmes physiques, chimiques, biologiques, médicaux, économiques, financiers, sociaux, sont désormais étudiés via des modélisations mathématiques et des simulations numériques. La pénétration par le calcul des différentes sphères de l'activité scientifique et sociale est une caractéristique forte de notre société. À tous les niveaux, l'enseignement portera, de moins en moins, sur l'apprentissage des techniques traditionnelles de calcul, qui sont déjà incorporées dans les calculatrices et les logiciels professionnels, mais, en priorité, sur la pratique intelligente de ces nouveaux outils technologiques.

Changer les représentations des maîtres

En formation, il s'agit d'abord de changer les représentations des maîtres à partir de ce que l'histoire et l'épistémologie viennent de nous apprendre. Pour cela, on dispose de nombreuses occasions d'associer calcul et raisonnement : élaborer une stratégie de calcul, reconnaître des formes, rechercher des analogies, jouer sur les variations possibles, réfléchir au sens des expressions manipulées, anticiper et vérifier ses résultats, contrôler leurs dimensions s'il s'agit de grandeurs. Bien entendu, tout cela prend pleinement son sens lorsque le calcul n'est pas présenté comme un but en soi, mais comme un outil au service de la résolution d'un problème.

Une autre distinction connotée idéologiquement est celle qui est faite entre calcul exact et calcul approché. Elle renvoie à l'opposition entre mathématiques pures et mathématiques appliquées, seules les premières étant considérées comme nobles et valorisées par l'institution. Pour éviter la « souillure » que constituerait une valeur approchée, de nombreux enseignants ne posent que des problèmes épurés, avec des données bien choisies de sorte que toutes les opérations tombent juste et que tous les algorithmes se terminent convenablement (au lycée, pensons par exemple aux équations du second degré dont les racines sont toujours de petits nombres entiers). Choisir un peu plus souvent des situations concrètes issues des autres disciplines devrait pourtant faire apparaître assez naturellement des résultats approchés obtenus à partir de données elles-mêmes approchées. L'usage des calculatrices, avec l'affichage fréquent à l'écran de valeurs approchées obtenues par troncature ou par arrondi, est une autre source riche et incontournable de réflexion. Et même, lorsque tous les nombres en jeu peuvent être connus exactement, les procédures usuelles de vérification devraient permettre d'associer calcul exact et calcul approché. Il peut s'agir d'un contrôle d'ordre de grandeur sur les premiers chiffres des nombres ou, à l'opposé, d'un contrôle local sur les derniers chiffres, ce qui introduit efficacement au calcul des congruences et aux systèmes de vérification d'usage courant, comme les clés des numéros INSEE ou des comptes bancaires.

Un dernier enjeu est de sortir par le haut de la vision caricaturale que les enseignants ont des instruments, vision qui conduit à deux positions extrémistes tout aussi absurdes : soit on considère qu'il n'y a plus rien à faire en mathématiques à l'école puisque les machines prennent en charge tous les calculs, soit on interdit totalement les machines en croyant qu'elles empêchent tout apprentissage solide du calcul. Quel que soit l'instrument utilisé, il y a une part de calcul automatique, indispensable pour soulager l'esprit, et une part de traitement raisonné. Par ailleurs, dans tout calcul, il y a, comme on l'a vu, une organisation préalable des opérations à effectuer, et un contrôle des résultats, en général par un calcul approché d'ordre de grandeur. Pour ces procédures annexes, le calcul mental reste indispensable en parallèle de l'utilisation de tout instrument. La véritable question n'est pas l'opposition calcul posé/calcul instrumenté, mais la complémentarité calcul mental/calcul instrumenté. Par ailleurs, outre la nécessité de répondre à un besoin social, l'usage raisonné de la calculatrice peut permettre une activité mathématique véritable à tous les enfants, même à ceux qui ne maîtrisent pas complètement le calcul posé.

Un film sur l'enseignement du calcul à l'école primaire

Nous avons vu qu'une part essentielle du travail mathématique consiste, pour résoudre des problèmes internes ou externes au champ mathématique, à rendre des « objets » accessibles au calcul, à développer les techniques de ce calcul, à organiser ces techniques au sein de théories dont le développement influera en retour sur le calcul. Rendre des objets accessibles au calcul suppose un travail de modélisation pour aboutir à une représentation calculable de ces objets. Dès l'école élémentaire, le travail sur les nombres et les grandeurs, partant d'objets matériels, en constitue un premier exemple paradigmatique. À ce sujet, je voudrais présenter un film réalisé à l'IREM de la Réunion par Didier Bernot et Yves Martin, qui s'intitule *Du calcul sur les objets au calcul numérique* [Bernot & Martin 2007]. Son objectif est de montrer, sur des séquences filmées en classe, le long apprentissage du calcul. Le film met en évidence différents invariants, présents en cycle 2 comme en cycle 3, notamment le calcul sur les objets en début d'apprentissage, puis sa difficile mutation vers le calcul numérique.

En cycle 2, le passage des collections d'objets aux nombres entiers s'effectue à travers trois idées qui structurent la progression : une façon différente de penser les nombres en construisant des collections organisées autour des pivots que constituent le 5 et le 10 ; l'enseignement d'une comptine régulière de la suite orale des nombres où l'idée de groupement est portée par la langue : ainsi 27 pourra aussi bien se dire « vingt-sept » et « deux dix et sept » ; l'enseignement de procédures de calculs s'appuyant sur une

conceptualisation des nombres et sur la restitution de la vision d'autrui. Ces choix permettent à l'enfant de s'affranchir du comptage et du surcomptage, et d'utiliser de véritables procédures de calcul.
En cycle 3, il s'agit d'introduire les fractions sur la base d'un questionnement de mesure par la manipulation de bandes et d'institutionnaliser leur écriture à partir des expressions des élèves. Les pratiques de fractionnement des enfants amènent à installer des équivalences d'écriture lors de la mise en commun. Les uns éprouvent le besoin de faire référence à la bande unité comme support de conversion alors que chez d'autres, un début d'abstraction calculatoire commence à émerger. Le contexte fractionnaire est progressivement arithmétisé, même si les fractions ne restent, pour certains élèves, qu'un vocabulaire.

Tout au long du film, on voit que les enseignants mis en scène s'appuient, non sur une mémorisation *a priori*, coûteuse du point de vue cognitif, mais sur une stratégie d'apprentissage jouant sur les particularités, les régularités, les compositions et décompositions de nombres, tout en visant progressivement une réelle mémorisation permettant de libérer l'esprit pour d'autres tâches. On discerne bien ici les rapports entre calcul et conceptualisation, que nous avons rencontrés dans l'analyse historique et qui semblent essentiels dans une perspective d'enseignement. Le calcul commence à s'élaborer sur des objets encore mal spécifiés. Les nombres entiers et rationnels seront utilisés par les élèves pendant très longtemps sans qu'ils ne soient jamais parfaitement définis du point de vue mathématique. Cette définition « rigoureuse » (introduction des entiers naturels par les axiomes de Peano, construction des nombres rationnels en « quotientant » l'ensemble des couples d'entiers par une relation d'équivalence) n'interviendra que très tard, à l'université, et seulement pour une infime minorité d'entre eux. Auparavant, ce sont la numération, les opérations sur les nombres, les techniques opératoires qui définiront les nombres de fait. Ainsi, le calcul est bien au cœur de la conceptualisation des nombres. C'est le calcul qui construit chez les enfants un univers mathématique dont les objets ne sont pas entièrement définis et ne peuvent pas l'être. Il en va de même à tous les niveaux de la scolarité comme dans l'histoire : ce sont les algorithmes de calcul qui définissent les nouveaux objets mathématiques et leur confèrent, au moins provisoirement, de l'existence. Que l'on pense aux dérivées et aux intégrales au lycée : dans la mesure où l'on ne dispose à ce niveau d'aucune théorie sérieuse des nombres réels et des limites qui pourrait permettre de les aborder rigoureusement, ces objets n'existent aux yeux des élèves que par les règles de calcul formel qui servent à les manipuler.

Construire et utiliser des instruments de calcul

En ce qui concerne les instruments, il faut commencer par prendre conscience qu'un objet technologique – boulier, règle à calcul, calculatrice ou logiciel – est d'abord un objet. Ce n'est que, via un processus de genèse instrumentale relativement complexe, qu'il peut devenir un réel instrument mathématique pour l'élève ou pour l'enseignant [Trouche 2005]. Aujourd'hui, même lorsque les calculatrices sont acceptées par l'enseignant, il n'y a pas réellement d'intégration et l'on s'aperçoit que les élèves maîtrisent très peu les instruments sophistiqués dont ils disposent. Ils ne savent les utiliser que lorsqu'ils fournissent directement la réponse demandée. Dans le cas contraire, les enfants sont peu capables de s'adapter (par exemple, lorsqu'il faut décomposer le calcul en plusieurs sous-calculs accessibles à la machine ou faire un changement d'échelle pour se ramener à des nombres entrant dans le champ de la machine) et encore moins de contrôler les résultats obtenus, que ce soit au niveau numérique ou graphique. Dans ces conditions, l'usage de ces objets ne sert ni le développement des capacités de calcul, ni l'articulation entre calcul et raisonnement. L'instrumentation mathématique des objets technologiques ne va pas de soi. Elle nécessite des compétences mathématiques solides, certaines traditionnelles et générales, d'autres spécifiques de la technologie considérée. Les enseignants ne consacrent pas, en général, le temps nécessaire à l'acquisition de ces compétences.

Je voudrais signaler ici la thèse de Caroline Poisard, intitulée *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer*, dont une version résumée est parue en ligne sur le site *CultureMATH* [Poisard 2006]. L'apport central de cette thèse, reposant sur des expérimentations en cycle 3, est que la fabrication par les enfants d'instruments à calculer (boulier chinois, bâtons de Neper, réglettes de Genaille, règle à calcul) et l'étude de ces instruments fournissent un terrain d'expériences permettant l'apprentissage efficace de la numération positionnelle et des techniques opératoires. Cet apprentissage se fait à travers des situations de recherche conçues pour rapprocher calcul et raisonnement. Les mêmes situations semblent d'ailleurs adaptées à la formation des enseignants. Pour chaque instrument, on parcourt successivement trois phases. Dans la phase de découverte, le professeur distribue un instrument par groupe et pose la question : « comment ça marche ? ». Dans la phase de fabrication, chaque élève étudie comment réaliser son objet, le fabrique et le personnalise. Dans la phase d'étude, une fois que chaque enfant possède son instrument, le professeur pose une nouvelle question : « pourquoi ça marche ? ». La transcription sur le papier des manipulations réalisées sur les instruments permet alors d'affiner considérablement la compréhension du calcul écrit.

Un autre exemple d'utilisation intelligente d'un instrument se trouve sur le site *MathEnPoche,* où Sébastien Hache présente une calculatrice virtuelle dont l'enseignant peut paramétrer le fonctionnement et, en particulier, désactiver certaines touches [Hache 2006]. Avec cette calculatrice « cassée », on obtient ainsi un système de contraintes simples qui obligent à recourir à des procédures personnelles et originales. Cela permet de travailler de façon ludique la numération et le calcul réfléchi. On assiste ici à une inversion du rôle de la machine : d'un instrument qui résout automatiquement les problèmes, elle devient elle-même une situation problème.

Lier le calcul à la résolution de problèmes et à l'apprentissage du raisonnement

Tout ce qui précède est de nature à persuader les maîtres que les techniques opératoires et l'automatisation du calcul ne devraient jamais devenir un but en soi. Ces techniques devraient servir à aborder de nouveaux champs de problèmes, quitte à les adapter à des situations voisines de celles dans le cadre desquelles elles ont été conçues. Là, les outils modernes peuvent jouer un rôle essentiel, en offrant la possibilité d'effectuer des calculs nombreux en un temps court, ce qui permet d'expérimenter véritablement, d'explorer des situations complexes, de repérer leurs régularités et leurs variations. De ce point de vue, on peut regretter que les problèmes rencontrés par les élèves restent souvent trop stéréotypés. Il existe pourtant de nombreuses situations se prêtant au développement conjoint des capacités de calcul et de raisonnement : problèmes avec trop de données ou avec des données manquantes, problèmes sans solution ou avec plusieurs solutions, problèmes nécessitant l'organisation d'un calcul complexe et son découpage en sous-calculs simples, problèmes combinatoires, etc. Un exemple typique est l'un des problèmes expérimentés par l'équipe ERMEL de l'INRP[12] : *« chercher, parmi les décompositions additives d'un nombre entier en nombres entiers, celle ou celles qui correspondent au plus grand produit »*. Les enfants pourront très

[12] Cet exemple est repris et résumé dans [Kahane *et al.*, 2002].

vite tester quelques décompositions, émettre des conjectures, les invalider par de nouveaux essais, améliorer progressivement leur résultat jusqu'à un point d'équilibre où il deviendra possible d'envisager une preuve même avec un bagage mathématique modeste.

J'espère avoir montré la richesse et la beauté du calcul, et son rôle constructif au service des mathématiques. L'intelligence du calcul peut se manifester de multiples manières à l'école, dans les pratiques de calcul mental et réfléchi qui mettent directement en jeu les propriétés des nombres et des opérations, dans l'anticipation et le contrôle des calculs instrumentés par les calculatrices, dans la construction des algorithmes de calcul et leur extension à de nouveaux types de nombres, dans l'organisation et la gestion des calculs qui surgissent nécessairement au sein de problèmes un peu complexes. Il n'y a pas d'incompatibilité entre un enseignement par résolution de problèmes et une acquisition méthodique des techniques de calcul. Des situations problèmes adaptées peuvent conduire à la découverte et à la mise au point systématique d'une nouvelle technique opératoire ; d'autres problèmes, qui exigent de répéter un grand nombre de fois un même type de calcul contribueront à l'acquisition d'automatismes. Par ailleurs, si les activités sont bien choisies, les enfants sentiront vite qu'ils ne peuvent devenir efficaces dans la résolution de problèmes que s'ils disposent d'un répertoire varié d'instruments et de méthodes de calcul parfaitement au point, leur permettant d'explorer rapidement et sûrement un grand nombre d'exemples et de cas particuliers. Un tel apprentissage est d'autant plus indispensable que les besoins sociaux et scientifiques d'aujourd'hui ne sont plus les mêmes qu'hier. Ils se sont déplacés de capacités d'exécution à des capacités d'anticipation, de contrôle et d'adaptation qui, toutes, exigent de l'intelligence.

Bibliographie

ARTIGUE Michèle, L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives, *Repères-IREM*, 54 (2004), p. 23-39.
http://www.univ-irem.fr/commissions/reperes/consulter/54artigue.htm

ARTIGUE Michèle, L'intelligence du calcul, *Actes de l'université d'été « Le calcul sous toutes ses formes » (Saint-Flour, 22-27 août 2005)*, université de Clermont-Ferrand, 2005, p. 5-20.
http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/site_math_universite/CD-UE/Menu_pour_Internet.htm

BERNOT Didier & MARTIN Yves, *Du calcul sur les objets au calcul numérique*, film présenté au Festival du film scientifique de la Réunion, avril 2007.
http://www.reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/PE2/Films/FilmsIREM.html

CHABERT Jean-Luc *et al.*, *Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*, Paris : Belin, 1994.

DURPAIRE Jean-Louis *et al.*, *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*, rapport à monsieur le ministre de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, n° 2006-034, juin 2006.
http://www.education.gouv.fr/cid4172/l-enseignement-des-mathematiques-au-cycle-3-de-l-ecole-primaire.html

HACHE Sébastien, Calculatrice virtuelle, *MathemaTICE*, 1 (2006).
http://revue.sesamath.net/spip.php?article12

IFRAH Georges, *Histoire universelle des chiffres*, 2 vol., Paris : Laffont, 1994.

KAHANE Jean-Pierre (dir.), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Paris : Odile Jacob, 2002 ; chapitre 4 (coordonné par Michèle Artigue) : Le calcul.
http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportCalcul/RapportCalcul.pdf

POISARD Caroline, *La fabrication et l'étude d'instruments à calculer*, CultureMATH, mai 2006.
http://www.dma.ens.fr/culturemath/materiaux/poissard/Poisard.htm

ROUCHE Nicolas, Ils doivent savoir calculer, *Bulletin de l'APMEP*, 472 (2007), p. 678-686.

SCHÄRLIG Alain, *Compter avec des jetons. Tables à calculer et tables de compte du Moyen Âge à la Révolution*, Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, 2003.

SCHÄRLIG Alain, *Compter du bout des doigts. Cailloux, jetons et bouliers, de Périclès à nos jours*, Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006.

TROUCHE Luc, Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques, *Actes de l'université d'été « Le calcul sous toutes ses formes » (Saint-Flour, 22-27 août 2005)*, université de Clermont-Ferrand, 2005, p. 265-289.
http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/site_math_universite/CD-UE/Menu_pour_Internet.htm

La résolution de problèmes : de la compréhension aux opérations

Michel Fayol, professeur des universités, directeur du Laboratoire de psychologie sociale et cognitive-CNRS-Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand

Dans la vie courante comme à l'école, les enfants doivent affronter et résoudre des situations problèmes. Toutefois, dans la vie courante, ces situations apparaissent le plus souvent en contexte : un score augmente, des fruits sont vendus et leur quantité diminue, etc. Ces contextes permettent, la plupart du temps, de se représenter comment s'organisent les données connues et celles qui sont inconnues. Par contraste, à l'école, c'est l'énoncé qui décrit la situation. En conséquence, la résolution nécessite d'abord que celui qui traite le problème parvienne à élaborer une représentation analogique de la situation décrite, ce qu'on appelle un modèle mental. La première difficulté réside alors, pour les élèves, dans la construction de cette représentation mentale. Cette difficulté ne se confond pas avec celle qui porte sur les aspects conceptuels de la situation. Malheureusement, ces deux dimensions sont souvent confondues et peuvent conduire à interpréter un échec comme relevant de difficultés conceptuelles alors que c'est le passage de la formulation langagière à la représentation de la situation qui fait obstacle. Une partie des échecs (et des réussites) tient ainsi à cette première étape, relevant pour une part de la sémantique des problèmes et, pour l'autre, de la formulation de l'énoncé. La manipulation des quantités, la résolution des opérations (addition, multiplication, etc.) interviennent dans un deuxième temps, même si elles ont également un rôle, peut-être même dans l'élaboration d'une représentation de la situation décrite par l'énoncé.

La compréhension des situations

Au cours des dernières décennies, les travaux portant sur les enfants ont mis en évidence ce que j'appellerai une saisie intuitive étonnamment pertinente de situations qu'on aurait pu estimer hors de portée d'esprits aussi jeunes. Pour illustrer ceci, j'ai choisi une recherche rapportée par Dixon et Moore (1996). Ces auteurs étudient les rapports entre le développement de la compréhension intuitive et l'utilisation de stratégies formelles. Ils élaborent une épreuve permettant d'évaluer cette compréhension (description verbale ou picturale, sans nombres) indépendamment de l'utilisation des nombres. Pour cela, ils étudient le mélange de liquides à températures, soit semblables, soit différentes : un récipient contenant un liquide à une certaine température reçoit le liquide d'un second récipient de volume identique ou différent à une température, soit identique, soit différente (en moins ou en plus). Les participants (CE1, CM2, élèves de quatrième et de première, adultes) doivent d'abord répondre aux questions ne faisant appel qu'à la compréhension intuitive à partir d'images : dans quel sens la température va-t-elle évoluer ? (Les auteurs décrivent cette compréhension en termes de principes : 1) au-dessus/en-dessous : à température initiale constante, la température finale ira toujours dans le sens de celle du liquide ajouté ; 2) la température finale se situera entre celle initiale et celle du liquide ajouté ; 3) plus la quantité ajoutée est importante et plus la variation de température ira dans le sens de celle du liquide ajouté ; 4) des températures égales donnent une température égale). Ils doivent ensuite résoudre les problèmes numériquement. En images, les situations sont décrites à la fois verbalement et par des illustrations (très froid, froid, tiède, chaud, très chaud et, quant aux quantités un peu, moyen, beaucoup). Avec les données numériques, les températures approximatives doivent être indiquées sur un thermomètre. La résolution numérique s'effectue sur des quantités (20, 30, 40, 50, 60 et une, deux ou trois tasses versées dans le récipient initial qui compte deux tasses).

Les performances sont très différentes sous les deux conditions. Sous la condition intuitive, même les CE1 répondent souvent de manière exacte et rapide ; sous la condition numérique, même les adultes ont besoin de beaucoup de temps. Les CE1 ont une bonne compréhension des principes, même si elle est moindre que celle des CM1, des élèves de seconde et des adultes qui ne diffèrent que faiblement entre eux. La comparaison des performances à la compréhension intuitive des principes et à la résolution arithmétique montre que les participants qui comprennent les principes utilisent assez souvent des procédures de calcul violant ces principes : c'est le cas de 41% de ceux qui les comprennent en CE1, de 38% des CM2 et de 25% des élèves de quatrième, de 11% des élèves de première et de 6% des adultes. Inversement, ceux qui ne comprennent pas les principes utilisent rarement des stratégies pertinentes. La stratégie arithmétique n'est jamais supérieure à la compréhension intuitive. La compréhension des principes apparaît donc nécessaire mais non suffisante.

Ces résultats, parmi d'autres, font apparaître deux faits. D'une part, **la compréhension d'une situation complexe comportant des manipulations peut être très précoce en dépit de sa complexité**. Il existe de nombreux autres exemples recueillis au cours de la dernière décennie, notamment en ce qui concerne les effets des ajouts ou retraits de quantités. Il ne s'agit pas d'opérations arithmétiques mais de transformations. D'autre part, cette compréhension est nécessaire mais non suffisante. L'introduction de données numériques pose problème, même à ceux qui ont compris la situation et sont en mesure de fournir le sens et l'intensité des variations.

Les caractéristiques sémantiques

Les caractéristiques sémantiques des problèmes concernent les connaissances conceptuelles relatives aux accroissements, diminutions, combinaisons et comparaisons d'ensembles d'éléments. Leur prise en compte a permis d'élaborer progressivement une classification des problèmes. On a ainsi abouti à une classification, dans laquelle les énoncés se trouvent catégorisés en fonction des relations sémantiques décrivant un type donné de situations mais aussi en fonction des opérations mises en jeu (addition et soustraction) et de l'identité de l'élément inconnu. Apparaissent également les taux moyens de réussite établis en fonction des niveaux scolaires.
- Les problèmes de type **Changement** (numéros 1 à 6) impliquent tous la survenue d'au moins une transformation « temporelle » appliquée à un état initial et aboutissant (ou ayant abouti) à un état final.
- Les problèmes de type **Combinaison** (numéros 7 et 8) concernent des situations statiques et non des transformations, recherche soit d'un total (7) soit d'un état initial (8).
- Les problèmes de type **Comparaison** (numéros 9 à 14) demandent de comparer des quantités statiques présentées à l'aide de formules du type « plus de/moins de ».

Ces grandes catégories ne sont réductibles ni aux calculs numériques ni au formalisme mathématique. Leur pertinence repose sur les différences dans les performances des enfants (ou des adultes) et dans la mobilisation de procédures différentes de résolution. Une difficulté majeure concernant ces résultats classiques tient à ce que nous pouvons difficilement faire la part de ce qui relève de la compréhension de la situation elle-même, et de ce qui tient à l'élaboration de la représentation de cette situation, à partir des énoncés verbaux.

Un exemple permet d'illustrer où se situe l'une des difficultés (extrait de Fayol, Camos & Roussel, 2000). Imaginons un ouvrier devant creuser une tranchée et sachant par expérience qu'il lui faudra 20 heures pour y parvenir. Son employeur propose de lui affecter un compagnon avec lequel il partagera la tâche. L'ouvrier sait d'emblée que 10 heures suffiront pour venir à bout du travail. Imaginons enfin que ce même ouvrier, ou un apprenti, se trouve en session de formation et qu'il reçoive un énoncé du type : « Un ouvrier met 20 heures pour creuser une tranchée. Combien mettront 2 ouvriers ? ». Les solutions proposées sont très souvent erronées. Par exemple, dans le cas présent, la réponse 40 heures (20 heures chacun x 2 ouvriers) est fréquente. Les recherches des deux dernières décennies ont confirmé que l'une des difficultés essentielles des activités de résolutions de problèmes arithmétiques réside non pas, ou en tout cas pas exclusivement ou principalement, dans le traitement des opérations, même si elles ont une certaine importance, mais dans la compréhension/interprétation des énoncés et dans la mise en relation du résultat de cette compréhension avec les procédures de résolution.

L'impact de la formulation

Les problèmes du tableau 1[13] peuvent donner lieu à différents modes de présentation : des éléments extérieurs à l'énoncé lui-même - images, matériel ... - mais entretenant avec lui une relation plus ou moins étroite peuvent être ajoutés ; les modalités de formulation du texte de l'énoncé peuvent être modifiées.

Une même structure sémantique peut être présentée sous forme verbale ou imagée, avec ou sans matériel manipulable, etc. La mise à la disposition de matériel manipulable entraîne, au moins chez les plus jeunes et dans le cadre de problèmes additifs (qui nécessitent le recours à des additions ou des soustractions), une amélioration des performances par rapport à une condition « sans matériel ». Elle entraîne également des changements dans les procédures mises en œuvre. En général, la présence de matériel manipulable ou la présentation des énoncés sous forme partiellement ou totalement imagée facilite l'élaboration de la représentation de la situation décrite et donc soulage la mémoire de travail (dont la capacité serait limitée, et de manière particulièrement drastique chez les enfants les plus jeunes) et rend cette mémoire de travail plus disponible pour traiter les informations, sélectionner les procédures et les mettre en œuvre.

Un enfant confronté à un problème doit ainsi, en premier lieu, construire une représentation de la situation décrite. La réussite de cette construction dépend de ses connaissances antérieures, du contexte mais aussi de la formulation. Les mots ou expressions, comme les agencements ayant trait à la succession des énoncés dans le texte du problème influent sur la résolution des problèmes. Par exemple, les énoncés présentant les événements survenus en suivant l'ordre chronologique de leur occurrence induisent moins d'erreurs que ceux dans lesquels cet ordre se trouve modifié. Ou encore, le placement en tête de la question entraîne, à tout âge, une amélioration des performances, surtout avec les problèmes les plus difficiles : ceux portant sur la recherche de l'état initial.

Une importante série de recherches a mis en évidence que même les adultes éprouvent des difficultés pour passer de la forme verbale des énoncés à la représentation de la situation qu'il décrit (Fayol, 1990, 1991 ; Fayol, Thévenot & Devidal, 2005). Quant aux enfants, la comparaison des réussites à des épreuves numériques verbales et non-verbales révèle que les problèmes simples d'addition et de soustraction sont mieux et plus précocement résolus quand ils sont présentés sous forme non verbale, par exemple en utilisant des jetons, que sous forme verbale. Ainsi, Levine, Jordan et Huttenlocher (1992) ont montré que les mêmes enfants de 4 ans étaient en mesure de résoudre des additions et soustractions présentées sous forme non-verbale (2 + 3) mais non lorsque ces mêmes opérations étaient fournies avec un énoncé, qu'il s'agisse d'histoires (Paul avait 3 billes. Son ami lui en a donné 2), de nombres d'objets

[13] Cf. page 59

(Combien font 3 billes et 2 billes ?) ou simplement d'opérations abstraites (3+2 = ?). Il fallait attendre l'âge de cinq ans pour que les performances deviennent comparables, quel que soit le mode de présentation. Dans une autre série de travaux, Jordan, Huttenlocher et Levine (1992, 1994) ont rapporté que des enfants issus de classes sociales défavorisées faisaient aussi bien que des enfants de classes sociales favorisées dans les épreuves non-verbales, mais pas aux épreuves mobilisant le langage : leurs performances étaient alors systématiquement et significativement inférieures.

Le fait que les énoncés soient très souvent présentés sous format écrit permet de comprendre que sous cette modalité se cumulent les difficultés langagières et celles qui relèvent de la lecture elle-même. Les données de la littérature attestent que les enfants qui présentent une association des deux troubles ont un profil arithmétique encore plus faible que ceux qui présentent un trouble isolé de l'arithmétique. Dans une étude longitudinale portant sur des enfants suivis du CE1 au CE2, Jordan, Kaplan et Hanish (2002) rapportent que les enfants qui commencent avec des difficultés en lecture présentent plus souvent que les autres (ceux qui ont un trouble isolé de l'arithmétique) des difficultés en arithmétique au cours de leur scolarité primaire ultérieure. Ce constat vaut, bien que les épreuves arithmétiques aient été données oralement.

<u>L'impact des opérations</u>

Poids de la connaissance des opérations simples

Les résultats les plus clairs proviennent de plusieurs études ayant cherché à identifier les sources potentielles de réussite et d'échec en résolution de problèmes provenant de différences inter-individuelles (Fayol, Thévenot & Devidal, 2005). Ils font ressortir l'impact de trois dimensions. Kail et Hall (1999), Muth (1984), Swanson, Cooney et Bock (1993) travaillant avec des enfants de 8 à 12 ans, aboutissent à des conclusions proches et complémentaires. La performance en lecture (= en compréhension de textes) constitue le meilleur prédicteur de la réussite en résolution de problèmes arithmétiques. Le deuxième meilleur prédicteur est la réussite aux opérations arithmétiques, notamment aux opérations dites simples (celles qui correspondent aux tables). La capacité de la mémoire de travail apporte également une contribution significative, mais son poids est moins important et varie d'une recherche à une autre. Il ne s'ensuit pas qu'on doive écarter l'impact d'autres variables qui peuvent influer sur chacune de ces trois dimensions (par exemple le QI). Toutefois, l'impact et le poids de ces trois dimensions est confirmé par d'autres données.
Plusieurs recherches rapportent un effet significatif de la connaissance des opérations arithmétiques, et notamment de l'automaticité de leur résolution sur la performance en résolution de problèmes. Muth (1984) comme Swanson et al. (1993) montrent qu'il s'agit du deuxième prédicteur des performances. Kail et Hall (1999) observent que l'amélioration des résultats aux opérations (additions, soustraction, etc.) entre 8 et 12 ans se traduit par une amélioration subséquente des performances en résolution de problèmes. Plus récemment, Fuchs et al. (2006) rapportent les résultats portant sur une cohorte de 330 enfants de CE2 dont ils ont évalué le langage, le lexique, le raisonnement, l'attention, la mémoire de travail, etc.
Les résultats montrent que l'efficience de résolution des opérations arithmétiques simples (3 + 2) est associée à la performance en résolution de problèmes, ce qui n'est pas le cas des performances aux algorithmes (par exemple des soustractions avec retenue). Ceci suggère que la fluidité des calculs simples serait fondamentale pour le déroulement ultérieur des habiletés arithmétiques.

A notre connaissance, Ostad (1998) est le seul à avoir comparé les performances d'enfants (norvégiens) de CE1, CM1 et de classe de sixième au développement arithmétique normal (MN) ou déficient (MD) à deux épreuves, l'une portant sur des additions et soustractions présentées isolées, l'autre utilisant les mêmes opérations insérées dans le contexte verbal des 16 énoncés issus de la classification de Riley et al. (1983). Ostad note que les MN progressent au cours de la scolarité alors que les MD stagnent dès le CE1. Cette stabilité des performances des MD est associée à la persistance des procédures les plus primitives de résolution des opérations : utilisation de matériel (cubes, jetons) ou recours aux doigts. Le niveau des performances en résolution des opérations correspond à celui relevé à la résolution des problèmes. Jordan et Montani (1997) aboutissent à la même conclusion, notant toutefois que les MD (sans troubles de la lecture) manipulent très habilement les doigts et que leurs performances augmentent s'ils disposent de tout le temps nécessaire pour résoudre les opérations. Au contraire, les procédures mobilisées par les MN évoluent vers le comptage mental et la mémorisation des faits numériques. Comme les MD résolvent aussi bien que les MN les deux premiers problèmes de chacune des deux catégories Changement et Comparaison**,** il paraît plausible que le recours à des procédures plus évoluées conditionne l'amélioration des performances en résolution de problèmes.

L'interprétation de l'impact de la connaissance et de la maîtrise des opérations élémentaires sur les performances en résolution de problèmes arithmétiques s'explique facilement en termes de charge cognitive. La résolution des problèmes nécessite la mobilisation de plusieurs composantes qui se disputent des ressources d'attention limitées. Lorsque l'une des composantes présente des difficultés, elle capterait tout ou partie de l'attention, diminuant d'autant les capacités disponibles pour les autres composantes. En d'autres termes, une faible maîtrise des opérations élémentaires empêcherait de consacrer suffisamment d'attention ou de ressources de mémoire à la compréhension de la situation ou à l'arithmétisation de cette situation. Il s'agit toutefois d'une interprétation. Le fait qu'elle soit compatible avec de nombreuses données n'assure pas qu'elle soit la seule ni même la meilleure.

Les travaux de Brissiaud (2002, 2003) apportent un éclairage nouveau à cette question. Cet auteur a en effet montré que la résolution exacte de certains problèmes présente un niveau de difficulté qui la rend dépendante de connaissances évoluées relatives aux opérations, leur sens et leur conduite. Par exemple, le problème (1), qui, pour un adulte, apparaît équivalent à (2), se révèle beaucoup plus difficile pour les enfants, comme l'attestent les pourcentages de réussite (entre parenthèses). La même remarque vaut pour (3) et (4).

(1) Eric avait 47 billes. Il perd 3 billes. Combien a-t-il de billes maintenant ? (56%)

(2) Eric avait 47 billes. Il perd 44 billes. Combien a-t-il de billes maintenant ? (15%)

(3) Eric avait 44 billes. Il gagne des billes. Maintenant il a 47 billes. Combien a-t-il gagné de billes ? (54%)

(4) Eric avait 3 billes. Il gagne des billes. Maintenant il a 47 billes. Combien a-t-il gagné de billes? (10%)

Ces résultats suggèrent que la sémantique des problèmes ou la représentation de la situation décrite ne suffisent pas à rendre compte de la difficulté relative des problèmes arithmétiques. La résolution devient complexe lorsque la représentation initiale de la situation décrite est discordante par rapport à l'économie de la résolution numérique. Les problèmes (1) et (3) peuvent être résolus respectivement par activation d'une procédure de comptage arrière, à partir de 47 et avant, à partir de 44, ce qui les rend très facilement et précocement réussis. L'activation de ces mêmes procédures pour (2) et (4) conduit à des résolutions longues et complexes, difficiles, soit à mettre en œuvre, soit à imaginer. Or, appliquer à (2) et (4) les procédures inverses (respectivement comptage avant, à partir de 44 et comptage arrière, à partir de 47) rendrait ces problèmes faciles à résoudre. Cela suppose toutefois que soit construite, par l'enfant, l'équivalence des procédures des points de vue à la fois conceptuel et calculatoire. Or, ces équivalences ne vont pas de soi et nécessitent sans doute un enseignement et la capacité de percevoir a + b et b + a comme équivalentes, ou a – b = c -> c + b = a ou a – c = b comme dérivables. Alors que les problèmes (1) et (3) peuvent être résolus par des enfants même non scolarisés par le biais de procédures simulant des actions, la résolution de (2) et (4) semble requérir la prise de conscience de propriétés abstraites propres aux opérations arithmétiques.

En résumé, l'impact de la connaissance fluide (exacte et rapide) des opérations simples sur les performances en résolution de problèmes, attestée par de nombreux résultats, pourrait reposer à la fois sur l'économie cognitive réalisée par la résolution de ces opérations ne nécessitant plus de recours à l'attention et sur la capacité de manipuler les termes des opérations de manière à faciliter les traitements. À ma connaissance, ces deux éventualités n'ont pas été contrastées.

L'évolution de la résolution des opérations

Des quatre opérations arithmétiques élémentaires, deux ont donné lieu à de très nombreuses recherches : l'addition et la multiplication. Les recherches portant sur la soustraction et la division sont plus récentes et nécessiteraient qu'on leur consacre une synthèse impossible à réaliser ici. Je m'en tiendrai donc aux deux premières.

La résolution des additions. Les enfants passent par une série d'étapes qui va de la réunion physique des entités dont la somme est recherchée (rassembler 3 billes et 2 billes puis dénombrer l'ensemble résultant) à la récupération directe et automatique en mémoire de cette somme (3 + 2 => 5). Entre ces deux étapes, s'intercalent des procédures variées et plus ou moins successives dont l'application dépend du niveau de difficulté et de la pratique des opérations : dénombrement avec support physique d'abord, mental ensuite, à partir du premier nombre fourni (2 + 5 => 234567) puis à partir du plus grand des deux (2 + 5 => 567; procédure dite du min m, n), ce qui nécessite la mise en œuvre de la commutativité. Siegler et Shrager (1984) rapportent que les enfants de 5 ans disposent déjà d'un éventail de procédures différentes qu'ils utilisent de manière adaptative en fonction de la difficulté des opérations, du contexte et de variables de personnalité : comptage à l'aide des doigts, représentation externe par des collections de doigts mais sans comptage de ceux-ci, comptage mental suivant la règle du min m, n , récupération en mémoire d'un résultat qui peut être juste ou erroné. Selon que la situation incite à l'exactitude ou à la rapidité, le même enfant peut, soit récupérer un résultat éventuellement erroné en mémoire, soit compter laborieusement pour éviter l'erreur.

L'évolution des performances apparaît comme un passage graduel d'une procédure de comptage algorithmique initialement lente, coûteuse et sujette à erreurs à une récupération directe en mémoire de résultats automatiquement activés par la présentation des opérandes, ce qu'on appelle **les faits arithmétiques** (Barrouillet & Fayol, 1998; Logan, 1988; Logan & Klapp, 1991).
Cette récupération, d'abord limitée aux opérations les plus simples (2 + 2; 2 + 3) s'étend ensuite aux opérations plus complexes (3 + 5) (Lemaire et al, 1994). Elle n'élimine ni la disponibilité des procédures antérieurement élaborées, comme en atteste le recours au comptage par les adultes (LeFevre, Sadesky & Bisanz, 1996) ni le montage de nouvelles procédures de décomposition (37 + 29 -> 37 + 30 - 1).

La résolution des multiplications simples. Même si les multiplications sont susceptibles d'être résolues par des procédures diverses - additions successives, décompositions - la récupération en mémoire des faits arithmétiques domine, chez les enfants comme chez les adultes (LeFevre, Bisanz, Daley, Buffone, Greenham & Sadesky, 1996). C'est aussi elle qui est privilégiée par l'instruction. Les opérandes et les résultats se voient, en conséquence, organisés en mémoire selon ce qu'on appelle un réseau hautement interférent (Anderson, 1995), ce qui a évidemment des effets sur les performances et sur l'acquisition.

Les effets d'interférence dans la résolution des multiplications se manifestent de plusieurs manières. Les erreurs de réponses se situent massivement dans les tables (8 x 3 = 32), ce qui atteste de l'organisation en réseau des faits multiplicatifs (LeFevre & Kulak, 1994).

La récupération est plus difficile pour les opérations qui activent des réponses multiples. Ainsi, 6 x 4 et 8 x 3 sont plus souvent échoués que 7 x 3 (respectivement 12% et 12% contre 4%) (Barrouillet, Fayol & Lathulière, 1997; Wheeler, 1939) et demandent plus de temps. La récupération d'une réponse est facilitée par son activation antérieure. Cet effet d'amorçage se traduit soit par une amélioration soit, au contraire, par une erreur. Par exemple, 24 préalablement activé est énoncé à la place de 32 en réponse à 4 x 8. Ces effets sont précocement attestés, vers 9-10 ans (Lemaire et al, 1994; Lemaire & Fayol, 1995). Toutefois, comme pour l'addition, la récupération en mémoire n'est pas systématiquement utilisée pour toutes les opérations, même par les adultes (Lefevre et al, 1996).

Un phénomène intéressant relativement à l'acquisition de la multiplication tient aux interférences qui se produisent avec les additions. Miller et Paredes (1990) ont observé que les enfants de fin de deuxième année ou de début de troisième année primaire se mettaient à commettre plus d'erreurs et à avoir besoin de plus de temps pour résoudre les additions. Cette augmentation de réponses erronées correspondait précisément à la période d'apprentissage de la multiplication, comme si les associations de faits numériques se mettaient à interférer avec celles qui étaient déjà établies pour les faits additifs. Des arguments plus directs en faveur d'interférences entre faits additifs et multiplicatifs ont été apportés par des données empiriques recueillies auprès d'adultes (Winkelman & Schmidt, 1974; Zbrodoff & Logan, 1986). Des effets similaires s'observent dès la troisième année primaire mais ils commencent par apparaître sur les petites opérations avant de s'étendre aux plus grandes (Lemaire et al., 1994; Lemaire, Fayol & Abdi, 1991).

Au total, les résultats des travaux portant sur l'acquisition de la résolution de la multiplication montrent la constitution précoce d'un réseau de faits dans lequel les opérandes sont reliés aux seules réponses par des associations. La force de celles-ci varie en fonction de la pratique, de la taille et de la nature des opérandes. Par exemple, les erreurs sont très rares avec les doubles (par exemple 3 x 3) (Campbell & Graham, 1985). Ce réseau favorise, de par son organisation, la survenue d'interférences. Celles-ci affectent particulièrement les opérandes reliés à de nombreuses réponses diverses ou les réponses associées à plusieurs opérations (e.g., 12, 16, 18, 24). Elles sont également plus fréquentes avec les grandes opérations, en raison de la pratique plus soutenue des petites multiplications et de l'ordre de l'apprentissage qui privilégie les petites aux dépens des grandes.

La mise en place du réseau associatif des multiplicatifs est très précoce. Quelques présentations suffisent pour la plupart des enfants. Elle entraîne l'apparition d'interférences avec les faits additifs déjà établis. Ces interférences se traduisent par l'apparition d'erreurs dans les additions, par le ralentissement des vitesses de résolution et par l'existence de confusions associatives aboutissant à des erreurs mêlant les deux catégories de faits. Ces interférences résultent de l'activation automatique de l'ensemble des réponses associées à chacun des opérandes, voire d'associations entre réponses. Elles ne disparaissent pas avec la pratique. Comme le montrent les données collectées auprès des adultes, elles sont généralement inhibées, mais leur occurrence reste toujours possible, soit que leur niveau d'activation ait été accru par un amorçage, soit que l'attention requise pour l'inhibition des interférents fasse défaut (Lemaire, Abdi & Fayol, 1996).

Chez la plupart des enfants, la pratique régulière des activités mobilisant le calcul – notamment les transformations des quantités – induit la mémorisation des faits arithmétiques les plus simples (2 + 2 ; 2 + 3 ; 5 + 4 ; etc.). Elle ne suffit pas pour assurer celle des faits portant sur les grandes opérations, celles allant de 5 + 5 à 9 + 9 (Barrouillet & Lépine, 2005). Pour celles-là, l'automatisation de la récupération en mémoire nécessite une instruction et une pratique régulière. Geary et al. (1997), des USA, pays dont les enfants et les adultes jeunes sont connus pour leur faiblesse en arithmétique, notamment par rapport aux Chinois (voir PISA, PIRLS…), ont comparé les performances de Chinois et de ressortissants des USA à trois âges et/ou niveaux scolaires : en 6ème (12 ans), en terminale (12ème grade ; 17 ans) et chez des personnes âgées (entre 66 et 70 ans). L'appariement a été soigneusement effectué. Les épreuves comportaient, outre des épreuves standardisées, des soustractions simples, des soustractions complexes, des additions complexes et des épreuves de raisonnement. Les résultats se résument facilement : les élèves de 6ème et de terminale chinois dominent leurs pairs des USA dans toutes les épreuves d'arithmétique alors que les performances des plus âgés ne diffèrent pas. Les résultats actuels apparaissent comme consécutifs à un double mouvement : d'une part, une baisse de performances dans les habiletés de base chez les plus jeunes aux USA par rapport aux plus anciens ; d'autre part, une amélioration des performances des plus jeunes en Chine relativement à ces mêmes habiletés de base. Ces données suggèrent que la pratique du calcul est une condition de l'automatisation et de la stabilisation de l'apprentissage des faits arithmétiques correspondant aux tables, même si elle n'est pas seule à intervenir.

Deux types de difficultés ont été relevés dans la mise en place de la récupération en mémoire des faits arithmétiques.

D'une part, malgré les entraînements, certains enfants et adultes ne parviennent pas à mémoriser les faits arithmétiques, alors même qu'ils comprennent le sens des opérations et qu'ils sont en mesure de les résoudre en utilisant d'autres procédures (comptage, etc.). Les données actuelles ne permettent pas de déterminer clairement l'origine de cette difficulté. Elle est fréquemment associée à des troubles du langage (Fazio, 1999). Elle pourrait aussi tenir à une insuffisante capacité en mémoire de travail (Noël, 2004 ; Thévenot, Barrouillet & Fayol, 2001). Elle est considérée comme un indice de la présence de troubles arithmétiques dont le pronostic d'évolution est pessimiste en l'état actuel de nos connaissances. Pour ces enfants-là, il paraît nécessaire d'envisager le recours à d'autres procédures (le comptage) dont la rapidité et l'exactitude peuvent être améliorées.

D'autre part, d'autres individus ont appris les faits arithmétiques mais éprouvent des difficultés à associer rapidement et exactement les paires d'opérandes (3 et 8) au résultat (24). Leurs erreurs sont les mêmes que celles relevées chez les adultes (3 x 8 -> 32) mais elles sont plus fréquentes (Barrouillet, Fayol & Lathulière, 1997). Elles sont la conséquence de l'organisation en mémoire des faits arithmétiques : comme le montrent les données recueillies chez les adultes, même ceux qui maîtrisent les multiplications, les interférences sont toujours présentes et induisent parfois des erreurs (Healy et al, 1995). La fréquence relative de ces erreurs dépend de deux facteurs : l'organisation du réseau mémoriel et la capacité d'inhibition des réponses erronées (par exemple, la présentation de 3 x 8 active à la fois 18, 24, 27, 32 et la difficulté tient à la sélection de la réponse exacte). Certains individus pourraient éprouver des difficultés, non pas à mémoriser les faits, mais à sélectionner les réponses exactes.

En résumé

La résolution de problèmes arithmétiques, qui est l'une des activités les plus complexes et les plus échouées à l'école élémentaire, mobilise plusieurs dimensions.
Premièrement, elle renvoie à des situations dont la compréhension est nécessaire pour parvenir à la résolution. Les données dont nous disposons suggèrent qu'à l'école élémentaire, la compréhension des situations elles-mêmes pourrait ne pas constituer l'obstacle principal.
Deuxièmement, les situations sont décrites par des énoncés. Il s'ensuit que les élèves doivent non pas appréhender directement les situations (comme dans la vie courante) mais les (re)construire à partir de la formulation verbale, fournie oralement ou par écrit. Les données disponibles convergent pour montrer que le passage de la forme langagière à la représentation de la situation constituerait la difficulté majeure. Il s'ensuit que l'explicitation des énoncés et certaines modifications de leur organisation améliorent significativement les performances. Il s'ensuit aussi que les performances en résolution de problèmes sont fortement associées à celles recueillies en lecture (ONL, 2000).
Troisièmement, la connaissance et la mobilisation rapide et facile des faits arithmétiques est un déterminant de la réussite en résolution de problèmes. L'apprentissage et la maîtrise de ceux-ci apparaissent comme importants – même s'ils ne suffisent pas. Deux raisons sont invoquées pour expliquer cet impact : la première a trait à l'économie d'attention et de mémoire consécutive à la mémorisation des faits arithmétiques : ne pas avoir à compter en faisant appel à des procédures longues et coûteuses permet de consacrer l'attention et la mémoire à la compréhension de l'énoncé et à la construction de la représentation ; la seconde concerne le fait que la connaissances des faits, et notamment des associations entre opérandes et résultats, permet de manipuler les données pour faciliter la résolution en s'appuyant sur les propriétés des opérations (commutativité, inversion…). La confirmation de cette importance mériterait d'être empiriquement confortée, par exemple en évaluant l'impact sur la résolution de problèmes d'une instruction systématique portant sur la mémorisation des faits arithmétiques.

Indications bibliographiques : ouvrages en langue française

Bideaud, J. et Lehalle, H. *Le développement des activités numériques chez l'enfant.*

Paris : Hermès, Lavoisier, 2002

Bideaud, J., Lehalle, H. et Vilette, B. *La conquête du nombre et ses chemins chez l'enfant.* Lille : Presses universitaires du Septentrion, 2004

Bideaud, J.; Meljac, C. et Fisher, J-P. *Les chemins du nombre.*

Lille : Presses universitaires du Septentrion, 1991

Barrouillet, P. et Camos, V. *La cognition mathématique chez l'enfant.*

Marseille : SOLAL, 2006

Brissiaud, R. *Comment les enfants apprennent à calculer.* Paris : Retz, 2003

Dehaene, S. *La bosse des maths.* Paris : Odile Jacob, 1997

Ehrlich, S. *Sémantique et mathématique.* Paris : Nathan, 1990

Fayol, M. *L'enfant et le nombre.* Neuchâtel, Paris : Delachaux & Niestlé, 1990

Fisher, J-P. *Apprentissages numériques.* Nancy : Presses universitaires de Nancy, 1992

Julo, J. *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques.* Rennes : Presses universitaires de Rennes, 1995

Noël, M-P. *La dyscalculie.* Marseille : SOLAL, 2005

Van Hout, A., Meljac, C. et Fisher, J-P. *Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant.* Paris : Masson, 2005

Pesenti, M. et Seron, X. *Neuropsychologie des troubles du calcul et du traitement des nombres.* Marseille : SOLAL, 2000

Pesenti, M. et Seron, X. *La cognition numérique.* Paris : Masson, 2004

Vergnaud, G. *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Berne : Peter Lang, 1983

Vilette, B. *Le développement de la quantification chez l'enfant.*
Lille : Presses universitaires du Septentrion, 1996

…..et si vous êtes très motivé(e) :

Campbell, J.I.D. *Handbook of mathematical cognition.* New-York : Psychology Press, 2005

Michel.fayol@univ-bpclermont.fr

Tableau 1: Catégorisation des problèmes et taux de réussite selon Riley, Greeno et Heller (1983)

TYPES DE PROBLEME		TAUX DE REUSSITE			
PROBLEMES DE CHANGEMENT		**Mat.**	**CP**	**CE1**	**CE2**
Changement 1	X avait 3 billes. Puis Y lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X ?	.87	1.00	1.00	1.00
Changement 2	X avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Y. Combien de billes a maintenant X ?	1.00	1.00	1.00	1.00
Changement 3	X avait 3 billes. Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il donné à X ?	.61	.56	1.00	1.00
Changement 4	X avait 8 billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien a-t-il donné de billes à Y ?	.91	.78	1.00	1.00
Changement 5	X avait des billes. Y lui en a donné 5 de plus. Maintenant X a 8 billes. Combien X avait-il de billes ?	.09	.28	.80	.95
Changement 6	X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes ?	.22	.39	.70	.80
PROBLEMES DE COMBINAISON					
Combinaison 1	X a 3 billes. Y a 5 billes. Combien X et Y ont-ils de billes ensemble ?	1.00	1.00	1.00	1.00
Combinaison 2	X et Y ont ensemble 8 billes. X a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes ?	.22	.39	.70	1.00
PROBLEMES DE COMPARAISON					
Comparaison 1	X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien X a-t-il de billes de plus que Y ?	.17	.28	.85	1.00
Comparaison 2	X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien Y a-t-il de billes de moins que X ?	.04	.22	.75	1.00
Comparaison 3	X a 3 billes. Y a 5 billes de plus que X. Combien Y a-t-il de billes ?	.13	.17	.80	1.00
Comparaison 4	X a 8 billes. Y a 5 billes de moins. Combien Y a-t-il de billes ?	.17	.28	.90	.95
Comparaison 5	X a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Y. Combien Y a-t-il de billes ?	.17	.11	.65	.75
Comparaison 6	X a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Y. Combien Y a-t-il de billes ?	.00	.06	.35	.75

De quelques effets de contrats et du rôle des situations didactiques dans la résolution des problèmes d'arithmétique au cycle 3

Bernard Sarrazy, professeur des universités
Laboratoire Cultures, Education, Sociétés EA 4140 Equipe DAESL, Didactique et Anthropologie des Enseignements Scientifiques et Langagiers, Université Victor Segalen Bordeaux 2

Résumé

La question des rapports entre les règles enseignées (les algorithmes, par exemple) et l'usage qu'en font les élèves dans la résolution de problèmes nouveaux a nourri, parfois vivement, les débats sur l'enseignement des mathématiques. Elle sera, ici, mise à l'étude dans la double perspective du contrat didactique (tel qu'il est défini au sein même de la théorie des situations didactiques) et du paradoxe wittgensteinien de la règle (un algorithme ne contient pas en lui-même ses conditions d'application : son sens se révèle dans les usages circonstanciés). Ce cadre théorique permettra de caractériser deux types d'environnements didactiques (correspondant à différentes manières de faire faire des mathématiques aux élèves), et d'évaluer leurs effets en termes d'efficacité et d'équité dans la résolution des problèmes d'arithmétique au cycle 3. Les résultats permettront de montrer l'intérêt de se départir de l'opposition classique et contre-productive entre une conception « activiste » et « académique » de l'enseignement, au profit d'une conception favorisant l'examen des conditions susceptibles d'accroître, d'une part, la flexibilité chez les élèves dans les usages des connaissances qui leur sont enseignées et, d'autre part, l'articulation entre les intentions didactiques des professeurs et les dispositifs qu'ils sollicitent pour les satisfaire.

Position du problème

Comme le stipulent les programmes et comme le pensent la plupart des professeurs, les élèves doivent « découvrir les notions comme réponses à des problèmes » ; ces derniers doivent être conçus comme des occasions de « donner du sens aux notions étudiées » car ils permettent de placer les élèves « en situation d'apprentissage actif ». On ne saurait s'opposer facilement à de tels principes sans remettre en cause tout un ensemble de recherches qui, depuis plus de 30 ans, ont contribué à les fonder – à commencer par celles de Piaget. En effet, dans les années 70, en soulignant le rôle de l'action, de l'erreur et du problème (des déséquilibres), la théorie de l'équilibration renforça indirectement, et non négligemment, bon nombre de théories pédagogiques dans la mouvance du courant de l'Éducation nouvelle, mettant à l'avant-plan l'activité de l'élève. C'est dans la même période qu'émergea la didactique des mathématiques avec la théorie des situations didactiques (Guy Brousseau, 1998). Même si celle-ci semblait faire écho à la conception adaptative de la connaissance de Piaget[14], l'analogie s'arrêtait là. La nouveauté était ailleurs ! En effet, la théorie de l'équilibration restait *a quia* pour déterminer les conditions par lesquelles une situation pouvait constituer un *problème* effectif et dont le dépassement exigeait des adaptations correspondant aux connaissances à enseigner. Les propriétés de telles situations ne pouvaient ni être établies seulement à partir du sujet épistémique, ni découler de la seule dimension pédagogique des dispositifs d'enseignement, ni être inférées des mathématiques elles-mêmes, mais exigeaient

[14] On rappellera seulement qu'elle apparaît comme le produit d'un ensemble de processus résultant des interactions d'un sujet avec un milieu (cf. la distinction que fait Piaget entre « connaissance-état » et « connaissance-processus »).

l'étude des jeux complexes des rétroactions du *milieu* (au plein sens « broussaldien » du terme) – ces rétroactions devant être tout à la fois suffisamment lisibles (« assimilables ») par l'élève mais aussi suffisamment « riches » afin d'autoriser les régulations constructives nécessaires au dépassement des perturbations (les erreurs) et conséquemment à la construction des connaissances. Tel est un des apports majeurs des didactiques à l'enseignement des disciplines, et particulièrement aux mathématiques.

Décrire génériquement ces processus adaptatifs (Piaget) est une chose, étudier les conditions *spécifiques* de leur production (Brousseau) en est toute une autre[15]. La formule est abrupte certes, mais utile pour clarifier les enjeux attachés à l'usage des recherches dans la formation des professeurs, et plus particulièrement, pour préciser l'intérêt *didactique* des problèmes dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

En effet, sous l'effet de diverses influences (non contrôlées épistémologiquement ou didactiquement), les usages pédagogiques du constructivisme se sont radicalisés et ont pu conduire parfois à une certaine « fossilisation » de ces principes, à la péjoration de l'exercice et des techniques, voire même de l'enseignement comme forme classique de la transmission de connaissances… à tout le moins, à une sorte de naturalisation des conditions de l'enseignement en laissant croire à une inéluctabilité de l'apprentissage comme effet (mystérieux) de dispositifs génériques d'enseignement (le débat, l'activité, le conflit, le travail de groupes, etc.). Parallèlement, le rabattement des théories de l'apprentissage sur celles de l'enseignement a renforcé une sorte de cécité des professeurs aux conditions sur lesquelles ils peuvent effectivement agir pour enseigner. Les appels, parfois violents et souvent naïfs, qui sont faits depuis quelques années, d'un « retour » au bon sens, à l'empirisme ou à un certain classicisme pédagogique ne sont que les tristes indices de cette perte de repères chez bon nombre de professeurs qui ne semblent plus savoir équilibrer (ou penser ensemble) ces deux aspects de l'enseignement. C'est d'ailleurs l'un des problèmes pointés dans le récent rapport de l'inspection générale :

> « Il est clair qu'il faut effectivement trouver les justes équilibres entre les temps d'entraînement et les situations plus larges de recherche […] il apparaît que l'équilibre entre ces activités de construction [de connaissances à travers la résolution de problèmes] et les exercices d'entraînement ne se trouve pas aisément ; dans bon nombre de cas, l'investissement pour construire les notions paraît bien long et se fait au détriment du fonctionnement des notions. […] Ne serait-il pas préférable de multiplier les exercices pour installer la notion ? » (Durpaire, 2007, 35, 43).
>
> « À propos du socle en mathématiques, le Haut conseil de l'éducation a proposé de « donner une place accrue à la résolution de problèmes à partir de situations ouvertes et proches de la réalité » tout en insistant sur « la nécessité de créer aussi tôt que possible des automatismes en calcul (calcul mental, apprentissage des quatre opérations) ». Cet équilibre fait aujourd'hui défaut dans bien des classes : les exercices d'entraînement sont trop peu nombreux et les connaissances élémentaires ne peuvent dès lors être fixées convenablement. Il faut garder à l'esprit que l'objectif d'acquisition d'une culture mathématique passe, certes, par le développement des capacités de recherche, mais aussi par l'acquisition de procédures expertes (algorithmes opératoires par exemple) » (*id.*., 70)

[15] Bien sûr, le lecteur ne doit pas voir là une critique de la théorie de l'équilibration mais simplement un rappel de son domaine de législation. Piaget lui-même a d'ailleurs, maintes fois, signalé que les rapports entre épistémologie génétique et enseignement n'étaient pas à concevoir comme de simples déductions de l'une vers l'autre. En effet, ces tentatives, comme la *didactique psychologique* de Aebli (1966), en prenant au pied de la lettre le constructivisme, ont assimilé l'élève au sujet épistémique cher à Piaget et la sur-focalisation sur l'activité du sujet a masqué le rôle des conditions de cette activité. Ces tentatives ont conduit à des échecs retentissants aboutissant souvent à des effets contraires à ceux qui étaient poursuivis (cf. Marc, 1984).

Telle est, je crois, l'une des impasses contemporaines de l'enseignement des mathématiques et, à laquelle, ce texte tentera d'apporter quelques éclaircissements. Une des idées forces qui y sera développée peut s'exprimer simplement : lorsqu'un professeur enseigne telle notion, telle règle ou tel algorithme… l'élève apprend *en même temps*, la règle et (non séparément) une manière de faire des mathématiques, sans qu'elle lui soit explicitement enseignée – fort proche du « sens pratique » tel que l'a théorisé Pierre Bourdieu (1984). Cette manière de faire faire des mathématiques contribue à ce qu'on pourrait appeler (un peu pompeusement peut-être) l'acculturation des élèves aux mathématiques et détermine, non mécaniquement, les usages ultérieurs des règles enseignées à l'occasion de la résolution de problèmes nouveaux. C'est donc aux conditions de ce « faire faire des mathématiques »[16] aux élèves qu'il convient de s'intéresser : telle était une des préoccupations initiales de la théorisation des situations didactiques initiée et développée par Guy Brousseau.
La tension entre ces deux aspects (la règle et son usage) est souvent au centre des préoccupations de ceux qui cherchent à améliorer l'enseignement des mathématiques[17] et la manière de considérer leurs rapports est généralement l'objet de discussions parfois vives selon que l'accent soit mis sur l'un ou l'autre des termes de cette opposition. En effet, ce dualisme[18], marquant une des frontières entre les pédagogies dites « actives » et « classiques », pourrait être à l'origine du désarroi didactique des professeurs, évoqué ci-dessus et, conséquemment au fait qu'aujourd'hui la notion de problème apparaisse « confuse et diluée » (Durpaire, *id.*, 2006).
En illustration de ce désarroi didactique et du dessaisissement conséquent, je rapporte ci-après le script du final d'une leçon en CM2 sur le calcul relationnel conduite par un maître « chevronné » (professeur des écoles maître formateur) :

> Après la mise en commun de diverses méthodes, le professeur en affiche deux au tableau permettant de résoudre des problèmes additifs. Les deux sont satisfaisantes, mais l'une est ergonomiquement plus efficace et beaucoup plus simple que la seconde. À ma grande surprise, il ne signale pas aux élèves laquelle il est préférable de retenir et clôture sa leçon en disant : « Ceux qui ont eu quelques difficultés n'auront qu'à me demander la méthode qu'ils préfèrent. Je vous la ferai photocopier. » A l'entretien qui suit la séance, je ne manque pas de l'interroger sur les motifs de sa décision en insistant sur le fait que si les élèves sont en difficulté, c'est précisément du fait qu'ils ne possèdent pas les connaissances qui leur permettraient de « choisir » la méthode la plus satisfaisante. Voici sa réponse : « Je ne leur impose pas parce que je pense qu'il vaut mieux qu'ils utilisent une méthode qui leur paraît la plus proche de ce qu'ils auraient fait. Je ne se suis pas dans leur tête pour savoir ce qu'ils pensent. »

Bien sûr, ce maître, comme beaucoup de ses collègues, est un maître consciencieux et soucieux de la réussite de tous. Aussi, me paraît-il important de mieux comprendre les raisons qui conduisent les maîtres à faire ce qu'ils font et la manière dont ils le font, et d'en mesurer les effets. Une des raisons possibles de cette confusion tient au fait que ce débat (ancien et récurrent) est contre-productif et didactiquement mal engagé car la connaissance des

---

[16] L'expression est empruntée à F. Conne (1999).

[17] Nous l'avons déjà signalé, ces deux aspects sont, maintes fois, mis en tension dans le dernier rapport de l'inspection générale (Durpaire, 2006) : l'un, renvoyant à l'enseignement des notions et soulignant l'intérêt des exercices et des « problèmes destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer » (*Documents d'accompagnement des programmes,* p. 7) ; l'autre, mettant l'accent sur la culture mathématique, la « pratique mathématisante » (selon l'expression de Roland Charnay, 2004), c'est-à-dire, ce qu'apprennent à faire les élèves et que leur professeur ne peut pas leur enseigner (directement du moins).
Mais, souligne-t-il « Il faut garder à l'esprit que l'objectif d'acquisition d'une culture mathématique passe, certes, par le développement des capacités de recherche, mais aussi par l'acquisition de procédures expertes (algorithmes opératoires par exemple) » (*id.*, 70).

[18] Il est structurellement équivalent, aux oppositions classiques telles : « sens / algorithme », « apprendre que / apprendre à », « connaissances déclaratives / procédurales »…

algorithmes ne détermine pas plus la connaissance de l'arithmétique que celle des règles du jeu d'échec ne détermine le « savoir jouer aux échecs ». L'idée est simple mais pas triviale.

Comment les rapports entre les règles et leurs usages s'organisent effectivement dans l'enseignement ? Et quels sont les effets de ces modes d'organisation (des situations) sur ce qu'apprennent effectivement des élèves ? Tel sera l'objet de ce texte : éclairer cette thèse par l'analyse de deux types d'environnements didactiques correspondant à différentes manières de faire faire des mathématiques aux élèves, et évaluer leurs effets en terme d'efficacité et d'équité dans la résolution des problèmes d'arithmétique au cycle 3. Les résultats permettront de montrer l'intérêt de se départir de cette opposition entre une conception « activiste » et « académique » de l'enseignement, en faveur de l'examen des conditions susceptibles de favoriser la flexibilité des usages des connaissances enseignées. C'est à la présentation de ce modèle et des résultats qu'il a permis d'établir que sera consacrée la dernière partie de ce texte.

Le contrat didactique comme cadre d'analyse

Dans quelles circonstances serait-on conduit à distinguer :
« enseignement de la multiplication » et « enseignement du sens de la multiplication » ?
(Bernard Sarrazy, 2002)

Nul besoin d'une lourde enquête pour se rendre compte que les principaux soucis des professeurs se situent moins dans l'enseignement des algorithmes que dans la façon d'appréhender (d'analyser et de réguler) les difficultés que rencontrent leurs élèves pour en faire usage dans des situations nouvelles. Savoir des mathématiques ne se résume pas à « connaître » des algorithmes, des règles ou des définitions mais à « reconnaître » leurs occasions d'emploi[19]. On comprend alors pourquoi la traditionnelle épistémologie mécaniste de la règle et son application, véhiculée par la non moins classique distinction « mécanismes / compréhension », est encore si tenace. Le sens d'un algorithme n'est pas à rechercher en lui-même mais bien dans ses *usages* appropriés et circonstanciés. Telle est l'une des leçons que nous a léguées Wittgenstein (1961) (en philosophie) et Brousseau (1998) (en didactique des mathématiques). On n'échappe pas au sens, et toute tentative de domestication apparaît aussi vaine que celle de vouloir mettre le pied sur l'ombre de notre tête, comme aimait à le rappeler B. Russell. Le paradoxe est bien connu des didacticiens : le maître enseigne la règle à l'élève et, tôt ou tard, exigera de lui qu'il en fasse un usage légitime mais ne peut alors dire à l'élève ce qu'il attend de lui. Le contrat qui se noue tacitement dans cette relation, comme le rappelle Brousseau, « met le professeur devant une véritable injonction paradoxale : tout ce qu'il fait pour faire produire, par les élèves, les comportements qu'il attend, tend à diminuer l'incertitude de l'élève et par là, à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ou signifie ce qu'il veut que l'élève fasse, il ne peut plus l'obtenir que comme exécution d'un ordre et non par l'exercice de ses connaissances et de son jugement (premier paradoxe didactique). Mais l'élève est lui aussi devant une injonction paradoxale : s'il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les solutions et les réponses, il ne les établit pas lui-même et donc,

[19] Cette déclaration n'est, bien sûr, pas spécifique au champ scolaire ; elle est exemplairement illustrée par Thurston (1995) lorsqu'il rapporte les demandes récurrentes de ses collègues mathématiciens souhaitant obtenir des éclaircissements sur tel ou tel aspect d'une démonstration : « Ce que les mathématiciens avaient besoin, et ce qu'ils me demandaient, c'était d'apprendre mes façons de penser, et non comment je démontrais la conjecture dans le cas des variétés de Haken ».

n’engage pas les connaissances (mathématiques) nécessaires et ne peut se les approprier. Vouloir apprendre, impliquerait alors, pour lui, de refuser le contrat didactique pour prendre en charge le problème de façon autonome. L’apprentissage va donc reposer, non pas sur le bon fonctionnement du contrat, mais sur ses *ruptures et ses ajustements*. » (Brousseau in Sarrazy, 2002, 159). On voit bien comment cet usage constitue tout à la fois l’*instrument* de l’enseignement (le professeur n’a pas d’autre possibilité que de montrer l’intérêt de l’algorithme, de la règle… qu’il doit enseigner à travers les diverses situations qui permettent de lui donner corps) ; mais aussi le *but* et *critère* de l’apprentissage (il exige, attend… un usage idoine de la règle *hic et nunc*).
Au-delà même des motifs pédagogiques que les professeurs accordent, explicitement ou non, aux diverses dimensions de leur action (utiliser ou non un manuel de référence, pratiquer ou non le travail de groupes, favoriser au non les interactions avec les élèves…), au-delà même de leurs intentions déclarées et de leurs « cris de guerre pédagogiques »… les professeurs « enseignent » la règle et dévoluent à leurs élèves – car ils n’ont pas d’autre choix – la responsabilité de son usage.
Qu’on me pardonne le truisme : si l’on peut admettre – à quelques approximations près – que les élèves apprennent tous les mêmes (notions) mathématiques, il est moins sûr que, selon les environnements didactiques dans lesquels ils évoluent, ils apprennent les mêmes façons de les pratiquer, de les considérer... On comprend mieux l’intérêt d’examiner au plus près les conditions de cet enseignement. Ces conditions sont-elles suffisantes pour satisfaire les attentes du professeur, et que permettent-elles à l’élève de « voir » de ce que le professeur cherche vainement à montrer (l’usage) ?

Trois modèles d’enseignement

Historiquement, trois types de « réponses » ont été apportés à ce problème des rapports de la règle et son usage ; l’examen des fonctions attribuées au problème d’arithmétique, dans les plans d’étude des diverses réformes depuis 1887, (cf. Sarrazy, 2003) a permis de dégager trois grands modèles de l’enseignement des mathématiques :

- *Un modèle magistral* (qui apparaît dès 1887) principalement fondé sur l’ostension et la répétition. L’enseignement doit être « pratique, utilitaire et concret » et doit viser la transmission des rudiments du calcul nécessaires à la résolution de problèmes-types directement inspirés par vie sociale ou domestique. Mais les difficultés engendrées par ce type d’enseignement conduisent les professeurs à n’enseigner que des solutions-types que l’élève doit mémoriser faute de pouvoir les conceptualiser.
- *Un modèle « activiste »* apparaît à partir de 1938 en réaction au modèle magistral, et émergera avec force dans les années 1970 dans la mouvance de l’épistémologie génétique piagétienne et de la didactique des mathématiques : le problème devient *le* moyen privilégié de « donner du sens » aux connaissances enseignées ;
- Enfin, dans les années 80, dans le contexte du développement important de la psychologie cognitive, le *modèle métacognitif* se propose de régler la question des rapports des règles et de leur usage par l’enseignement de métarègles. Le « traitement de l’information » prend alors le pas sur la « construction des connaissances ». Ce mouvement se traduira par l’instauration d’un enseignement méthodologique et conduira, paradoxalement, à une sorte de démathématisation de l’enseignement : pour apprendre des mathématiques, il ne s’agit plus de faire résoudre des problèmes à l’élève mais de lui apprendre à les résoudre par l’enseignement de stratégies métacognitives afin que les élèves puissent mieux lire les énoncés (par exemple) ou, plus généralement, mieux traiter les informations.

Comme nous le verrons ultérieurement, ces trois modèles résument assez bien (« idéaltypiquement » du moins) bon nombre de pratiques d’enseignement aujourd’hui.

Même si, comme le rappelle le rapport déjà cité (Durpaire, *idem*, 55), le courant métacognitif n'a pas marqué de façon aussi importante les pratiques d'enseignement que les deux autres modèles, il contribua fortement à renforcer l'idée selon laquelle il serait possible (et même souhaitable) de permettre aux élèves de contrôler l'usage de leurs connaissances afin de mieux les utiliser. Un des effets majeurs de cette orientation a certainement été de minorer aux yeux des professeurs le rôle des situations puisque l'enseignement était censé permettre de prendre en charge le problème de leur usage dans des situations décontextualisées. C'est la raison pour laquelle, nous commencerons par mettre à l'étude ce premier modèle.

Le modèle métacognitif ou « l'évitement du contrat »

Le contexte d'émergence

Dans les années 80, le constructivisme piagétien laisse place à la psychologie cognitive ; les difficultés des élèves sont alors interprétées comme le produit d'une défaillance des procédures de sélection et de traitement des informations, et l'enseignement métacognitif s'impose comme un moyen de les corriger. Il est quasiment officialisé dès 1981 et donnera lieu en 1990, avec la Nouvelle Politique pour l'École, à l'émergence de la notion de *compétence transversale* qui apparaîtra sous la rubrique « traitement de l'information » (MEN, 1991, 36, 52). « L'apprenant » détrône alors « l'élève », et les problèmes se transforment en méta-problèmes : les usages des règles devraient pouvoir se régler par l'usage de métarègles. Cette « didactique à orientation psychologique » (cf. la thèse en cours de Roiné, 2008) se traduit rapidement dans les programmes par l'instauration d'un enseignement méthodologique (« un apprentissage *à* la résolution de problème »[20]) qui conduira à une sorte de démathématisation de l'enseignement : pour apprendre des mathématiques, il ne s'agit plus de résoudre des problèmes mais d'apprendre à les résoudre, temps durant lequel, les élèves n'apprennent plus de mathématiques ! Or, les principes d'un tel enseignement – tel celui de la transversalité des procédures de résolution – ne sont pas aussi fondés qu'ils prétendent l'être (Sarrazy, 1997) ; par exemple, les conditions de production de ces difficultés ne sont jamais invoquées. Aussi peut-on s'interroger sur les effets conséquents à la mise en œuvre de telles régulations didactiques : apprendre à résoudre un problème ne saurait être confondu ni avec la résolution elle-même, ni avec l'apprentissage des connaissances nécessaires à sa résolution (cette distinction sera ultérieurement opérée – programmes 2002, et plus particulièrement dans les documents d'accompagnement, p. 7).

Une efficacité apparente

Une recherche a permis de montrer que les réussites enregistrées par un enseignement métacognitif n'étaient qu'un leurre dont l'efficacité reposait sur une manipulation du contrat (Sarrazy, 1994). Les « élèves-méta » ne progressaient pas plus dans leur apprentissage de l'arithmétique que ceux qui étaient soumis à un enseignement classique, mais excellaient dans l'art de produire des réponses non-classiques (du type : « C'est impossible », « Ce problème est complètement absurde »…) lorsqu'on leur soumettait des problèmes non-classiques

[20] L'expression « apprentissage à la résolution de problèmes » apparaît pour la première fois en 1987 dans le titre d'un compte rendu d'un groupe de recherche de l'INRP dirigé par Colomb (1987). Que désigne-t-elle ? Il s'agit de « faire des activités de résolution de problèmes un domaine d'enseignement à part entière [...] [d'] instaurer une véritable didactique de la résolution de problèmes » (Gilis, Guillaume, 1995). L'influence du cognitivisme est ici manifeste puisque cet enseignement vise « l'acquisition de méthodes générales, d'heuristiques, de connaissances métacognitives, telle que la planification, le contrôle des procédures, l'évaluation de l'écart au but. » (*id.*).

(problèmes du type « capitaine »[21]), des problèmes lacunaires ou des problèmes avec des données numériques superflues. Ces travaux ont montré que cette réussite s'expliquait par un simple déplacement des exigences contractuelles et non par une meilleure compréhension des énoncés ou une meilleure conceptualisation des connaissances qu'ils sollicitaient. Pour révéler l'envoûtement de leur habitude à rejeter ces types de problèmes, j'avais soumis à des « élèves-méta » et « non-méta » des problèmes qui étaient « hors contrat » pour les élèves dans le contexte « méta », tels ces deux-ci :

> *Un mécanicien appuie sur l'extrémité d'une clé anglaise avec une force de 10 N de façon à visser un écrou. Sachant que le bras de levier est de 5 cm, calcule le moment de cette force.*
>
> *Un peintre met 6 heures pour peindre le mur d'un immeuble. Combien de temps mettront 3 peintres pour peindre le même mur s'ils décident de travailler ensemble ?*

Ces deux problèmes ne ressemblent nullement à aucun de ceux qu'ils étaient habitués à rejeter ; ils sont tout simplement incompréhensibles pour des élèves de 10 ans. Les résultats furent éloquents : on n'enregistrait aucune différence entre les groupes « méta » et « non méta ». Preuve était faite que les rejets des problèmes absurdes se faisaient en vertu du contrat et non par une miraculeuse augmentation de leur compétence dans le traitement des informations.

Si le cadre théorique du contrat permettait de comprendre que les phénomènes du type « capitaine » n'avaient rien d'étrange, et de montrer que la réponse fournie par les élèves (« Le capitaine a 36 ans ») n'était pas dénuée de sens, une question demeurait : *pourquoi certains élèves (généralement de bons élèves) rejetaient-ils la validité de ce type d'énoncé alors que d'autres l'acceptaient apparemment sans discussion* ?

Les hypothèses psychologiques qui se présentaient – défaillance dans le traitement des informations, dépendance-indépendance au champ par exemple – ne me semblaient pas satisfaisantes car elles repoussaient l'explication de ces différences dans les mystères d'une intériorité cachée : la pensée (qui en soi, ne saurait constituer une explication). C'est cet ensemble de raisons qui a déterminé la nécessité d'examiner *à la fois* les situations de productions de réponses des élèves et les arrière-plans susceptibles de rendre compte de ces usages.

Sens, usage et situations

Le dispositif élaboré avait montré que, « toutes choses égales par ailleurs », les mêmes problèmes recevaient des réponses radicalement différentes, selon les situations dans lesquelles ils étaient proposés et avait, du même coup, permis de remettre en cause le principe de la transversalité des procédures de résolution à la base du modèle métacognitif.

Le protocole expérimental utilisé est relativement classique : une même tâche[22] est proposée à 155 élèves de CM1 dans quatre situations différentes (voir plus bas).

---

[21] « Sur un bateau il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine ? »

[22] Le protocole contient quatre problèmes cibles inhabituels (problèmes de type « capitaine », des énoncés lacunaires, des énoncés contenant des données numériques superflues et des « pseudo-multiplicatifs ») ainsi que quelques problèmes classiques.

Afin de ne pas encombrer la lecture avec certains aspects du protocole, ici, inutiles, sa présentation ne sera pas détaillée[23] ; je n'évoquerai que le cas des problèmes baptisés « pseudo-multiplicatifs » du type :

> *Un escargot est au fond d'un puits. Il décide de sortir de ce puits. Sachant qu'il mettra 6 jours pour sortir du puits, combien de temps mettront 3 escargots pour faire le même trajet ?*

Ce type de problème présente la particularité de mettre en jeu un usage peu habituel de la multiplication, puisqu'il s'agit pour l'élève : *(i)* d'utiliser sa connaissance de la multiplication pour affirmer que sa résolution ne relève pas de cette opération ; *(ii)* de produire une réponse sans calculer (usage peu commun à l'école).

Les quatre situations sont toutes des situations d'évaluation ; elles diffèrent entre elles par leur degré d'analogie aux situations habituelles sur deux dimensions : leur niveau d'officialité déterminé principalement par le statut de l'émetteur des problèmes (pouvant être selon les situations, d'autres élèves, leur professeur ou l'expérimentateur) ; et les enjeux attachés à l'épreuve (individuel *vs* collectif).

(i) **Situation 1** (cadrage explicite auprès des élèves : « expérience d'un chercheur ») : l'expérimentateur demande aux élèves de résoudre une série de problèmes (parmi lesquels se trouvent les problèmes cibles). Les élèves sont informés que l'épreuve ne sera pas notée mais un certain nombre d'aspects liés à l'enjeu de cette évaluation n'ont pas été explicités ;

(ii) **Situation 2** (cadrage explicite « concours de mathématiques interclasses ») :
cette épreuve est présentée aux élèves comme un concours interclasses dans lequel chaque classe participante est censée proposer des problèmes aux autres classes. L'épreuve se déroule en deux temps : 1) présentation des règles du « concours » ; chaque élève rédige un énoncé avec sa solution qu'il remet ensuite à l'expérimentateur ; 2) L'épreuve proprement dite : le chercheur soumet son propre protocole. L'enjeu n'est pas individuel comme dans les autres situations, mais collectif.

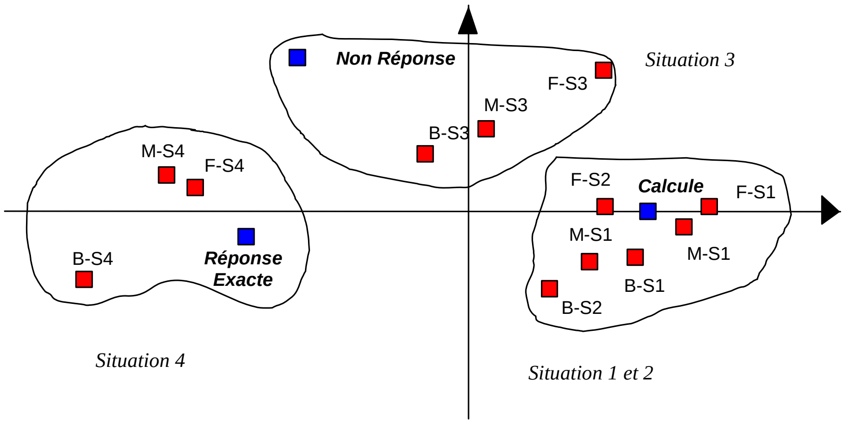
(iii) **Situation 3** (cadrage explicite « évaluation de fin de semestre ») :
chaque professeur procède à une évaluation telle qu'il a l'habitude de le faire à la fin d'un bimestre en y incluant le problème cible. L'enjeu pour les élèves est ici clairement défini : individuel et apprécié par leur professeur.

(iv) **Situation 4** (cadrage « situation avertie ») :
nous cherchions ici à nous assurer que les élèves étaient effectivement capables de repérer un énoncé de problème « défectueux ». Ainsi, les élèves ont été informés de la présence dans le protocole de problèmes non-calculables et de problèmes calculables (classiques).

[23] Le protocole *in extenso* est consultable dans Sarrazy (1997)

Une analyse factorielle des correspondances multiples a permis d'apprécier le poids des différents facteurs en présence (niveau scolaire des élèves et type de structuration des situations) sur les décisions des élèves à l'égard du problème cible.

Figure 1 – Plan principal de l'AFCM : types de réponses aux problèmes pseudo-multiplicatifs selon le niveau scolaire dans les 4 types de situations



(Codage des individus : « B-S1 » : bons élèves dans la situation1, « M-S1 » : moyens dans la situation1, « F-S1 » : faibles dans la situation1, etc.)

Les résultats montrent clairement que les décisions à l'égard du problème cible (absence de réponse, réponse calculée 3 x 6 ou réponse exacte « 6 jours ») s'expliquent davantage par le type de structuration des situations que par le niveau scolaire des élèves : lorsque l'enjeu est collectif et que le degré d'officialité est moindre, les élèves s'autorisent davantage à produire une réponse sans calculer. Il semble alors difficile de caractériser un « rapport » à la multiplication indépendamment de l'examen des situations dans lesquelles ce rapport se manifeste.

Les enjeux théoriques et praxéologiques de ces résultats étaient importants puisqu'ils remettaient sérieusement en cause l'idée, encore fort prégnante aujourd'hui, d'un mécanisme hypothétique permettant de régler (*in abstracto*) l'usage des règles enseignées.

Restaient à expliquer les différentes *sensibilités au contrat didactique* entre élèves qui se manifestaient *au sein d'une même situation*. Il s'agissait alors de centrer l'étude sur les modes de structuration des environnements didactiques pour comprendre ces différences entre élèves dans leurs manières d'agir et de penser. C'est ce que nous allons examiner maintenant.

Environnements didactiques et sensibilité au contrat didactique
La sensibilité au contrat ou le commerce inégal avec les implicites

La *sensibilité au contrat* est un concept que nous avons introduit pour désigner les décisions des élèves à l'égard des implicats mobilisés au sein du contrat didactique[24].

Donnons un premier exemple :

> La scène se déroule dans une classe de CM1. Quelques jours avant cet épisode, la professeure avait enseigné un algorithme permettant de calculer rapidement la différence entre deux nombres :

$$\begin{array}{r} 328 \\ -\ 47 \\ \hline 281 \end{array} \xrightarrow[+3]{+3} \begin{array}{r} 331 \\ -\ 50 \\ \hline 281 \end{array} \xrightarrow[+50]{+50} \begin{array}{r} 381 \\ -\ 100 \\ \hline 281 \end{array}$$

> Dans la première partie du contrôle semestriel, elle avait inclus l'exercice suivant :

Quel serait ton cheminement pour effectuer ces calculs ?

a) 875 - 379 = ________________________________

b) 964 - 853 = ________________________________

c) 999 - 111 = ________________________________

> Sur 19 élèves, 16 appliquent la règle enseignée pour le 3ème exercice :
> 999 -111 = 1008 - 120 = 1088 - 200 = 888

L' « effet capitaine » n'est rien d'autre qu'un simple et habituel effet de contrat de la même nature que celui-ci et certainement beaucoup plus spectaculaire. Dans ce type de situation, le professeur ne peut pas dire ce qu'il attend des élèves (comme pour tout autre problème du reste), et on imagine que ceux-ci peuvent s'interroger sur la teneur de ses attentes : doivent-ils manifester, comme ils le font habituellement, leurs compétences en arithmétique en résolvant un problème dont tout porte à penser qu'il relève de l'addition, et ignorer (ou feindre d'ignorer) l'aspect quelque peu cocasse de la question ? Ou bien doivent-ils se prononcer sur la pertinence de la question en regard des informations contenues dans l'énoncé ?
Selon la « réponse » qu'ils donneront à ces « interrogations », soit ils répondront, comme le fait la majorité des élèves, « 36 ans », soit ils rejetteront la validité de ce problème en déclarant qu'ils ne peuvent y apporter une réponse raisonnable. C'est précisément ce positionnement à l'égard de cet implicat que nous désignons « sensibilité au contrat didactique ».

---

[24] Rappelons que le *contrat didactique* est défini par G. Brousseau comme étant « l'ensemble des comportements (spécifiques [des connaissances enseignées]) du maître qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître. » (1980, 127). On peut aussi se reporter à la note de synthèse parue sur ce concept (Sarrazy, 1995) dans laquelle nous faisons apparaître les raisons de sa genèse, de son évolution dans le champ même de la didactique et les usages qui en sont faits dans diverses communautés scientifiques.

Pour finir de préciser le sens de ce concept, examinons les deux extraits d'entretiens suivants :

Ophélie (10 ans), excellents résultats scolaires.

- *(Exp) : Comment ta maîtresse voit qu'un élève a compris une leçon de mathématique ?*
- *(Ophélie) : Elle le voit en posant des questions qui sont un peu à côté de ce qu'elle avait dit ; si l'enfant répond comme il faut, c'est qu'il a bien compris car il peut répondre avec les renseignements qu'il y a. Dans les évaluations, il faut répondre qu'un petit détail ; et il y a des enfants qui répondent tout parce qu'ils ont appris bêtement sans rien comprendre ; ils ne sont pas capables de répondre qu'un détail. Si on met exactement le détail qu'elle voulait alors la maîtresse voit qu'on a bien compris.*
- *(Exp) : Quelle différence fera la maîtresse entre celui qui met tout et celui qui ne met que le détail ?*
- *(Ophélie) : La maîtresse, elle le saura, elle le garde pour elle et elle le mettra après en appréciation.*
- *(Exp) : Mais alors pourquoi la maîtresse ne dit pas ce genre de chose aux élèves ?*
- *(Ophélie) : Ben justement, pour le voir, parce qu'elle veut voir comment on est et si on apprend bêtement ou pas !*

Par contraste avec celui de Jean, on mesure combien les élèves ne sont pas tous également préparés à identifier et à décoder ces attentes implicites :

Jean (10 ans), bons résultats en français, plutôt faibles en mathématiques.

Voici la réponse de Jean à la même question :

La maîtresse voit qu'on a compris quand on écrit beaucoup et quand on écrit vite. Des fois, elle passe par rangée et elle regarde si c'est bien ce qu'on fait. Elle regarde pour savoir « comment est l'élève », car quand elle donne des devoirs à la maison certains se font aider par leurs parents alors à l'école elle nous met tout seul. Comme ça, elle est sûre qu'on ne copie pas et elle voit si on a compris.
A la maison j'apprends les choses qu'elle nous a appris, <u>mais j'ai remarqué que des fois elle nous demande pas vraiment ce qu'elle nous a appris alors moi j'apprends pas vraiment ce qu'elle nous a donné</u> car je vois que des fois qu'elle nous change des choses.

Raisons didactiques pour l'une, qui, manifestement, a compris que l'apprentissage n'était pas répétition et que sa maîtresse était forcément tenue au silence pour des raisons profondément didactiques (« Elle a besoin de voir », dit-elle) ; raisons instrumentales pour l'autre, qui, tout en comprenant aussi la nécessité qu'a la maîtresse de regarder « comment on est », ne comprend pas vraiment pourquoi « elle ne refait pas vraiment ce qu'elle [nous] a appris » et qui, en toute logique, « n'apprend pas vraiment ce qu'elle a donné ».
Ces deux exemples suffisent à bien montrer comment s'établit un commerce inégal des implicites dans les rapports entre professeur et élèves, et en quoi l'absence d'analyses de ses conditions de production, contribue à entretenir l'idéologie charismatique à propos des succès et insuccès scolaires (et probablement de façon plus marquée en mathématiques). C'est à l'analyse des conditions de production des sensibilités au contrat didactique que nous nous attacherons maintenant.

Modèle d'analyse des environnements didactiques

L'analyse des phénomènes de sensibilité au contrat est complexe ; elle se situe au croisement des deux principaux univers de pratiques des élèves : l'école et la famille. Nous n'aborderons ici que l'analyse du champ scolaire[25]. Deux résultats importants sont apparus immédiatement :

> *(i)Lla sensibilité : un phénomène spécifique aux mathématiques*[26] : les coefficients de corrélation partielle[27] permettent d'attester l'existence d'un lien entre les niveaux scolaires en mathématiques et la sensibilité au contrat ; cette liaison ne se maintenait pas dans le cas du français. Il apparaît donc difficile de continuer d'affirmer que « l'effet capitaine » peut s'expliquer par les difficultés de « lecture » des énoncés de problèmes.
>
> *ii*) *Existence d'un effet classe* : la classe de l'élève apparaît comme un facteur déterminant de la sensibilité et plus particulièrement pour les élèves faibles – l'analyse de variance [niveau en maths × classes × sensibilité] permet d'attester un effet de la classe sur la sensibilité indépendant du niveau scolaire en mathématiques des élèves ($F = 5.88$; s. ; $p. < .01$; ddl = 6).

Pour comprendre les raisons de l'inégale dispersion de la sensibilité selon les classes, le modèle d'analyse devait permettre d'estimer la marge de manœuvre qui, dans l'organisation et la gestion des situations, est dévolue (volontairement ou non) aux élèves. Cette interrogation théorique m'a conduit à m'intéresser à un ensemble de travaux sur les effets de variabilité dans les pratiques éducatives. Ils étaient relativement peu nombreux : Flanders (1966), Drévillon (1980) et Bru (1991).
L'idée force qui s'en dégagea et qui fut à l'origine du modèle, était la suivante : plus une *même* forme d'organisation ou de gestion de l'enseignement présente des modalités de réalisation différentes, plus l'incertitude attachée à cette forme est élevée. Aussi, pour se mettre en accord avec les attentes, implicites ou non, des professeurs, l'élève doit davantage « s'interroger » sur le domaine de validité de ses connaissances que s'il était soumis à un enseignement fortement ritualisé dont la variété serait beaucoup plus réduite. En effet, dans ce cas, il est beaucoup plus facile pour l'élève de savoir par avance ce qu'il doit faire, et adopter ainsi une conduite *ad hoc.* Imaginons un professeur qui n'interrogerait systématiquement que les élèves qui ne lèvent pas le doigt, celui qui ne souhaiterait pas être interrogé n'aurait qu'à demander la parole avec insistance ! Une forte variabilité, par les ruptures qu'elle introduit dans les routines, invalide ces stratégies : l'élève ne peut plus se fier aux seuls indices de surface et ne peut ni anticiper, ni maîtriser (ou beaucoup plus difficilement) l'enchaînement des séquences lui permettant de repérer les comportements attendus par le professeur.

---

[25] Le lecteur pourra trouver dans Sarrazy (2002) l'étude relative à l'impact des pratiques d'éducation familiale sur les phénomènes de sensibilité au contrat didactique.
[26] Bien sûr, nous ne voulons pas dire que ce phénomène n'apparaît pas dans d'autres disciplines mais que ses manifestations en mathématiques sont sans lien avec les compétences linguistiques (grammaticales, lecture ou maîtrise du vocabulaire) des élèves.
[27] Les trois variables en présence (niveaux en mathématiques, en français et sensibilité au contrat didactique) étant fortement liées entre elles, il convenait donc de calculer les corrélations partielles afin d'éliminer l'influence de l'une des trois en la maintenant constante et d'estimer ainsi la liaison entre les deux autres. Rappelons que le coefficient de corrélation partielle correspond à celui qu'on observerait entre deux variables pour des valeurs constantes de la 3ème.

Détaillons maintenant la structure du modèle d'analyse ; trois dimensions des pratiques d'enseignement ont été définies :

i) la structure didactique de la leçon ;
ii) les formes de l'organisation sociale ;
iii) la régulation potentielle de l'activité des élèves : la variabilité didactique.

Sur l'ensemble de ces trois domaines, six variables booléennes[28] ont été définies afin de mesurer, pour chacun des professeurs, la variabilité de l'organisation et de la gestion de l'enseignement entre les deux leçons, sur un même thème.

I. La structure didactique de la leçon

V_1. Quel est le type de dépendance didactique ? Le professeur procède-t-il de tâches simples vers des tâches complexes ou l'inverse ?
V_2. Place de l'institutionnalisation : à quel moment le professeur enseigne-t-il un modèle de résolution ? Plutôt en début de leçon ou plutôt à la fin ? Ou, tantôt au début, tantôt à la fin ?
V_3. Les modes de validation : comment les élèves sont-ils informés de la validité de leur réponse ? Le professeur utilise-t-il toujours le même mode de validation (par le milieu, par évaluation directe, par effet Topaze…)

II. L'organisation sociale

Comment s'organisent les échanges dans la classe ?
V_4. Les modes d'interactions : maître-élève(s), élève(s)-élève(s)...
V_5. Le groupement des élèves : groupe classe, petits groupes...

III. La régulation potentielle de l'activité des élèves : la variabilité didactique

V_6. Cette variable a été définie sur la base d'un indice de variété mesurant la « capacité » de l'enseignant à envisager « à chaud » diverses modalités pour une même variable didactique dans la conception d'un énoncé de problème – eu égard à l'importance de cette variable (cf. Sarrazy, 2002), nous présentons en annexe[29] de façon détaillée les modalités de son évaluation et les principaux résultats qu'elle a permis d'établir).

Le profil défini par l'ensemble de ces six variables, représente un résumé des variations observées pour chacun des professeurs. Ces profils ont ensuite été regroupés par une classification hiérarchique en trois classes distinctes et considérées, chacune, comme caractéristique d'une « culture scolaire » particulière.

---

[28] Pour une variable donnée, si une variation est observée entre les 2 leçons alors la variable prend la valeur « 1 » sinon « 0 ». Par exemple, à la première leçon les élèves étaient en groupe, à la seconde ils travaillaient individuellement : V5 =>1.

[29] Annexe 1 : la régulation potentielle de l'activité : la variabilité didactique, page 179

Résultats et commentaires

Nous nous limiterons ici à la présentation des deux styles les plus contrastés :

1. Le style « *dévoluant* » correspond à ce qu'on pourrait appeler en première approximation une « pédagogie active ». Il se caractérise par une forte variabilité dans l'organisation et la gestion des situations : ces maîtres pratiquent régulièrement le travail par groupes sans se limiter forcément à cette forme de groupement des élèves ; les problèmes « amorces » sont généralement complexes ; leur classe est fortement interactive (les élèves interviennent spontanément, les réponses « chorales » ne sont pas rares…) ; l'institutionnalisation est différée dans la leçon. Tels sont les traits principaux de ce premier style. Comment ces professeurs évoquent-ils leurs propres pratiques ?

> *a)* « Je ne fais jamais des leçons classiques ! […] Je mets habituellement les élèves en groupes, ils ont une situation problème à résoudre donc ils inventent une solution pour la résoudre. J'envoie quatre ou cinq gosses au tableau. On compare les solutions, comment on a fait ça… On critique, c'est-à-dire, on analyse et puis, après, on se met d'accord sur les meilleures. »
>
> *b)* « J'essaie de trouver des situations de recherches, de découvertes où les élèves essaient de... et des situations d'affrontements entre gamins, essayer de construire des savoirs entre eux déjà, ou de leur proposer des hypothèses et de voir, entre eux, si elles sont justes, si elles sont fausses ; ensuite moi je sers, à la fin, en dernier ressort, de juge pour voir *un petit peu* celui qui a raison ou tort... »

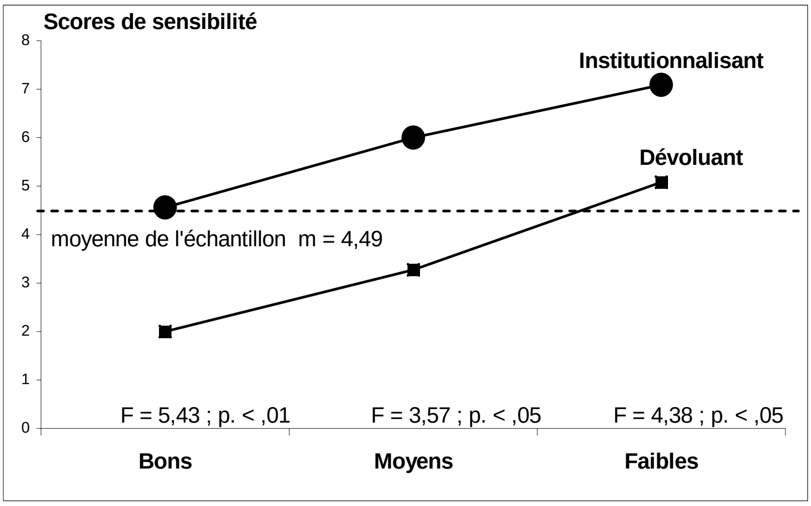
2. Le style « *institutionnalisant* » se caractérise par une faible ouverture et une faible variété des situations ; on pourrait l'appeler « enseignement classique » ou « frontal » dont le schéma de base pourrait se résumer par le triptyque « montrer-retenir-appliquer ». Ces maîtres institutionnalisent un modèle de résolution très rapidement, puis soumettent à leurs élèves des exercices de complexité croissante ; ils sont d'abord corrigés localement (le maître passe dans les rangs et corrige au « coup par coup ») puis collectivement, au tableau, où il enseigne en commentant la solution, s'aidant parfois, selon le temps dont il dispose, de la participation de certains élèves sur le mode « question-réponse ». L'espace interactif est quantitativement et qualitativement fort différent de celui du style précédent : on n'observe quasiment jamais d'interventions spontanées ou de réponses « chorales » des élèves. Bref, ce sont des maîtres très formalistes qui cherchent à maîtriser le plus de paramètres possible de leur classe comme en témoigne l'extrait d'entretien suivant :

> « Pour les problèmes, normalement on met « solution », « opération » et je veux une phrase de réponse. Ce sur quoi j'insiste beaucoup c'est sur les mécanismes parce que, avec les mécanismes, c'est cent pour cent de réussite, même pour les plus... [faibles]. C'est quand même agréable qu'aux gosses, on puisse de temps en temps leur dire : « Mon vieux, ce soir, c'est parfait, vraiment parfait quoi ! » […] Moi, je suis pour la grande classe où tout le monde travaille ! Parce que, sinon, c'est de la pagaille, et puis moi je ne suis pas partisane du tout de ce genre de choses [travail en groupes]. On se tait, on écoute celui qui a quelque chose à dire. Alors, évidemment quand tout le monde à quelque chose à dire… alors, on est obligé de sélectionner et si, au bout d'une fois ou deux, ils voient que c'était la même question, d'eux-mêmes, ils apprennent à baisser leur doigt. »

Quels sont les effets de ces styles sur les phénomènes de sensibilité au contrat ?

Dans des contextes « dévoluants », 48 % des élèves s'autorisent à produire une réponse sans calculer (au problème escargot) contre seulement 17 % dans le contexte « institutionnalisant » [χ^2= 6.08 ; p. <.04] – bien entendu, ces différences se maintiennent à même niveau scolaire et quel que soit le type de situation de production de ces réponses[30]. Ces styles s'avèrent donc pertinents pour expliquer les phénomènes de sensibilité au contrat comme le montre le graphique ci-dessous :

Figure 2 – Sensibilité au contrat selon le style d'enseignement pour chacun des niveaux scolaires en mathématiques



Les différences entre les cultures didactiques, descriptibles par les formes d'organisation et de gestion des situations, permettent d'expliquer l'inégale distribution des sensibilités des élèves. Plus les élèves ont la possibilité de confronter les règles enseignées à des situations faiblement ritualisées, comme c'est le cas dans les contextes dévoluants, plus ils « s'autorisent » à les engager dans des situations nouvelles. Réciproquement, plus l'incertitude attachée aux situations est réduite, comme c'est le cas dans les contextes institutionnalisants, plus les élèves semblent établir un rapport « rigide » entre une règle et son usage et ne « s'autorisent » pas, ou très peu, des écarts non conventionnels.

Efficacité et équité : cas de l'arithmétique

Peut-on dire qu'un style serait préférable à un autre, arguant que le style « dévoluant » permettrait aux élèves de « mettre plus de 'sens' sur les savoirs scolaires » pour reprendre ici le credo pédagogique actuel ? Ce serait une erreur.

Si nous proposons à ces mêmes élèves des problèmes de difficulté non triviale dans des situations faiblement décontextualisées par rapport au contexte d'acquisition, alors les résultats précédents s'inversent.

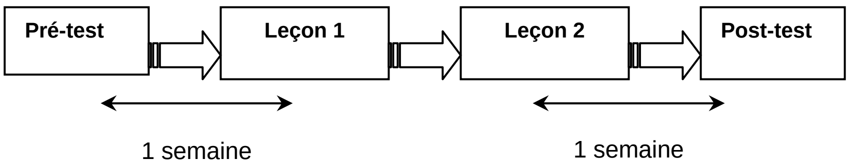
[30] Notons aussi que les mêmes résultats ont été enregistrés avec les autres types de problèmes : problèmes type « capitaine », lacunaires, etc.

Conditions de l'expérience

Les problèmes retenus correspondent à la 4ème structure additive de la typologie élaborée par Vergnaud (1983). Cette structure présente la particularité de ne mettre en jeu que des transformations positives ou négatives (« gagner » ou « perdre ») sans qu'aucune indication ne soit fournie sur l'état numérique initial (d'où son appellation : « TTT », « transformation-transformation-transformation »). Exemple :

> *Lou joue deux parties de billes. Elle joue une partie. À la seconde partie, elle perd 4 billes. Après les deux parties, elle a gagné 6 billes. Que s'est-il passé à la 1ère partie ?*

Le plan expérimental est classique : 22 problèmes de difficulté variable ont été soumis aux élèves lors d'un pré-test. Il fut suivi de 2 leçons, espacées entre elles d'une semaine, à l'issue desquelles les mêmes problèmes ont de nouveau été soumis aux élèves.



Afin de ne pas influencer les scénarii des leçons, les professeurs n'ont eu accès au protocole d'évaluation qu'au moment du post-test. Un « indice de progression » (I_p), qui bien sûr ne se réduit pas au simple calcul de la différence des scores du pré-test et du post-test, a été défini pour chacun des élèves[31].

Résultats et commentaires

Deux aspects ont été pris en compte pour évaluer les effets de ces enseignements :

1. le premier, appelé *efficacité*, correspond à la mesure des performances effectives enregistrées au post-test en contrôlant les variables susceptibles d'infléchir les résultats observés (ici le niveau scolaire des élèves) ;
2. le second, appelé l'*équité*, mesure l'efficacité différentielle pour un groupe d'élèves donné, en tenant compte, cette fois, de leur niveau initial (en l'occurrence, les résultats obtenus au pré-test).

Les deux graphiques ci-après résument les principaux résultats.

---

[31] Le modèle d'estimation des progrès utilisé ici est d'une construction complexe ; la procédure utilisée (construction d'un modèle théorique), d'une part, permet d'éviter les effets classiques de plafond ou de plancher et, d'autre part, autorise à affirmer que l'élève a progressé (régressé) au seuil de risque de 10 %.

Figure 3 – Mesure de l'efficacité des deux styles d'enseignement selon le niveau en mathématiques des élèves

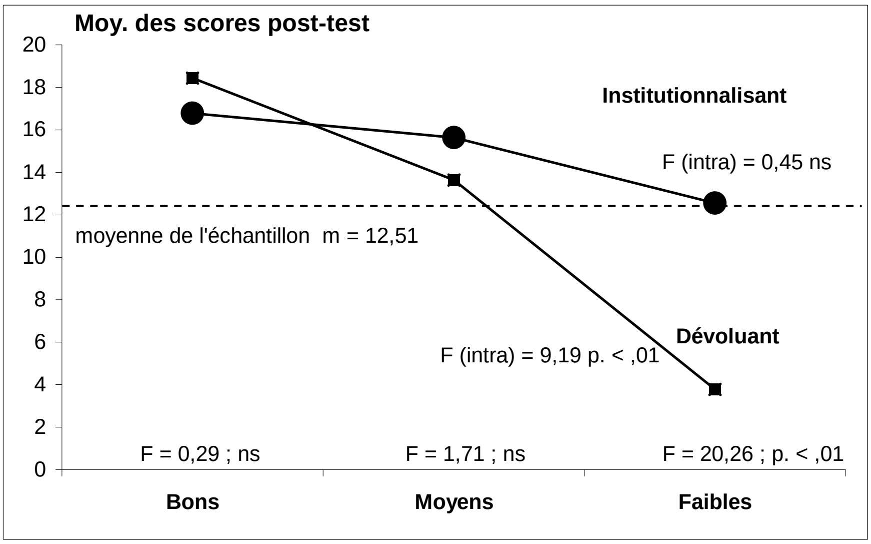
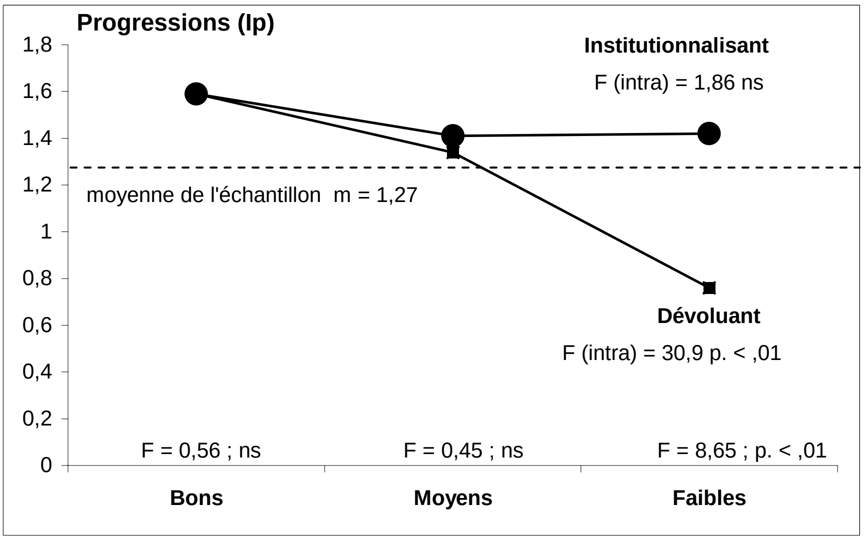


Figure 4 – Mesure de l'équité des deux styles d'enseignement selon le niveau en mathématiques des élèves



Le style « institutionnalisant » s'avère non seulement plus équitable (les élèves progressent significativement plus que les élèves « dévoluants » – $F_1 = 3,73$; p. < .05), mais aussi plus efficace : leurs performances sont significativement supérieures ($F_1 = 5,10$; p. < .01). Ces effets sont particulièrement manifestes pour les élèves faibles (*Efficacité* : F = 20,26 ; p. < .01 – *Equité* : F = 8,65 ; p < .01).

Ces derniers résultats devraient-ils nous inciter à renverser notre précédente conclusion et affirmer, cette fois, qu'une « pédagogie classique » est préférable à une « pédagogie active » ? Conclure que celles-ci sont élitaires ? Ce serait très largement imprudent. Car, d'une part, toute recherche n'est qu'un instantané, une fenêtre ouverte sur un univers de pratiques dont les temporalités ne sont pas analogues (cf. la thèse de Chopin, 2007). Rien ici, ne permet d'affirmer que sur un nombre plus important de leçons – qui, je le rappelle, ont été limitées, en accord avec les professeurs, à deux – les performances auraient été les mêmes. Le tempo de l'apprentissage est probablement plus lent dans un style dévoluant (mais aussi le temps alloué pour l'enseignement a des effets très significatifs sur la structuration et la gestion des dispositifs didactiques, Chopin, *id.*, 2007). Enfin, les résultats précédemment obtenus à propos de la sensibilité ne peuvent pas être ignorés.

Conclusion

L'ensemble de ces résultats appelle la question fondamentale de la visée de l'enseignement. Une « tête bien pleine » ou une « tête bien faite » ? Un « bon » enseignement doit-il viser une bonne maîtrise des algorithmes ou bien permettre aux élèves de les utiliser dans des situations nouvelles ? Cette question n'est pas seulement scientifique, elle est aussi foncièrement et noblement politique car elle pose inévitablement celle de savoir quel type d'hommes et de femmes l'École doit former. Or manifestement, si les deux visées précédemment énoncées paraissent nécessaires ensemble, elles apparaissent, de fait, peu compatibles par les rapports paradoxaux qu'elles entretiennent. C'est là le « paradoxe de la sensibilité », que j'avais énoncé en 1996 : « Plus le maître cherche à enseigner clairement l'usage d'une règle, plus il réduit la possibilité d'un usage singulier, mais idoine et qu'il exigera pourtant ultérieurement. ». On comprend mieux maintenant comment peut se tisser le drame didactique qui se joue pour les élèves les plus faibles : aveuglés par l'algorithme et par la certitude assurée par leur maître quant à son efficacité pour traiter une infinité de situations, ils ne s'autorisent pas à envisager d'autres usages que ceux qu'ils ont initialement rencontrés et, comme le disciple à qui son maître montre la lune, ils regardent son doigt.

La théorie des situations didactiques est née de la théorisation et de l'étude scientifique des conditions permettant le dépassement de ce paradoxe ; si sa reconnaissance dans la communauté scientifique est importante[32], sa diffusion et son usage dans la formation des professeurs restent fort limités – comme l'a montré une étude récente de Marchive (2007). Doit-on le regretter ? Certainement, car la formation des professeurs apparaît comme un levier privilégié pour permettre finalement aux professeurs de sortir des ornières idéologiques du dualisme que nous pointions en introduction de ce texte. Les idéaux pédagogiques, pour fondamentaux qu'ils soient dans la vie professionnelle d'un professeur, les laissent souvent démunis quant à leur possibilité d'action – la seule (bonne) volonté est une arme impuissante face à l'ignorance et l'incompréhension de leurs élèves (cf. Roiné, 2007).

L'accroissement de la culture didactique des professeurs leur permettrait très probablement :

i) de mieux cerner les enjeux didactiques (et pas seulement pédagogiques) attachés aux dispositifs qu'ils sollicitent (par exemple le travail en groupes est rarement justifié par des motifs didactiques) ;

ii) de développer, ce que Chopin (2007) appelle, la « visibilité didactique » correspondant à la « capacité » des professeurs de concevoir des situations

[32] En effet, Guy Brousseau est le premier récipiendaire de la médaille Félix Klein ; décernée par la commission internationale pour l'enseignement des mathématiques, cette distinction récompense l'œuvre d'une vie dans la recherche en didactique des mathématiques. Elle lui a été remise lors du Congrès international pour l'enseignement des mathématiques qui s'est tenu à Copenhague en juillet 2004.

permettant tout à la fois de révéler les domaines de difficultés des élèves et de les réguler.

Si, comme nous avons tenté de le montrer, et comme nous venons de le rappeler, il serait souhaitable d'accroître significativement la culture didactique des professeurs, on aurait tort de penser qu'elle devrait supplanter leurs idéaux pédagogiques. Ce serait, je pense, une grave erreur, car les professeurs, comme les élèves, ont besoin tout à la fois de certitude et d'illusion. Car, si le didacticien contribue à clarifier les conditions de possibilité de la diffusion des savoirs et des connaissances (qui, elles, ne dépendent en rien de l'élève mais bien de la culture), c'est au pédagogue que revient la tâche d'aménager les conditions socio-affectives pour permettre aux élèves de s'engager dans une aventure qu'on ne saurait vivre à leur place car, comme le pointe Brousseau (1986, 324), évoquant à cet endroit le fameux *Paradoxe sur le comédien* de Diderot, si le professeur « produit lui-même ses questions et ses réponses de mathématiques, [...] il prive alors l'élève de la probabilité de le faire ».

Références bibliographiques

Aebli H. (1966). – *Didactique psychologique :* application à la didactique de la psychologie de Jean Piaget, 4ème ed., Neuchâtel : Delachaux et Niestlé, 163 p.

Arter J.A., & Clinton L. (1974). – Time and error consequences of irrelevant data and question placement arithmetic word problem II : fourth grader. *Journal of Educational Research*, *68*, *1*. 28-31.

Audigier, M.-N., Cauzinille, E., Mathieu, J. & al. (1978). – Recherche et traitement de l'information dans la résolution de différents types de problèmes par des enfants. *Bulletin de psychologie*. *XXXII, 340*, 721-735.

Bourdieu P. (1984). – *Le sens pratique*. Paris : Les Editions de Minuit, 474 p.

Brousseau G. (1980). – Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire, *Revue de laryngologie otologie rhinologie*. 101/3-4, 107-131.

Brousseau G. (1986). – *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse pour le doctorat d'état, Université de Bordeaux I, 1986 a, 481 p.

Brousseau G. (1998). – *Théorie des situations didactiques*, [Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield], Grenoble : La pensée sauvage, 1998, 395 p., coll. Recherches en didactique des mathématiques.

Bru M. (1991). – *Les variations didactiques dans l'organisation des conditions d'apprentissage*. Toulouse : Ed. Universitaires du Sud. 163 p.

Campbell A.C. (1968). – Selectivity in problem-solving. *American Journal of Psychology*. *81*, 543-550.

Chopin M.-P. (2007). – *Le temps didactique dans l'enseignement des mathématiques*. Approche des phénomènes de régulation des hétérogénéités didactiques. Thèse de doctorat de l'université Victor Segalen Bordeaux 2. (s/d du Pr. B. Sarrazy). 337 p.

Conne F. (1999). – Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. *In* G. Lemoyne, F. Conne (dir.). – *Le cognitif en didactique des mathématiques.* Presses de l'Université de Montréal. 31-69.

Drévillon J. (1980). – *Pratiques éducatives et développement de la pensée opératoire*. Paris : PUF. 359 p.

Durpaire J.-L. (dir.) (2006). – *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*. Rapport de l'*Inspection générale de l'Éducation nationale. Paris* : Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche. 73 p.

Ehrlich, S. (1985). – La compréhension de textes par les enfants. In J. Bideaud, M. Richelle (eds), *Psychologie développementale : problèmes et réalités*. (pp.161-178). Bruxelles : Mardaga.

Ehrlich, S. (1990). – *Sémantique et Mathématique* : Apprendre / Enseigner l'arithmétique simple. Nathan. 303 p.

Fayol M. (1990). – L'enfant et le nombre : Du comptage à la résolution de problèmes. Paris : Delachaux et Niestlé. 233 p.

Fayol M. (1991). – Du nombre à son utilisation : la résolution de problèmes additifs. In J. Bideaud, C. Meljac, J.-P. Fischers (eds). *Les chemins du nombre.* (pp. 259-270). Lille : PUL.

Fayol M., & Abdi H. (1986). – Impact des formulations sur la résolution des problèmes additifs chez l'enfant de 6 à 10 ans. *European Journal of Psychology of Education*. *1-1*, 41-58.

Flanders N.A. (1966). – *Interaction analysis in the classroom :* A manual for observers. Michigan School of Education.

Marc P. (1984). – *Autour de la notion pédagogique d'attente*. Berne : Peter Lang. 235 p.

Marchive A. (2007). – *La pédagogie à l'épreuve de la didactique : approche historique, recherches empiriques et perspectives théoriques.* Presses Universitaires de Rennes (Soumis).

Ministère de l'éducation nationale de la jeunesse et des sports, direction des écoles (1991). – *Les cycles à l'école primaire*, Hachette, CNDP, Paris.

Richard J.-F. (1984). – La construction de la représentation du problème. *Psychologie Française.* 29-21. 226-230.

Richard J.-F. (1990). – *Les activités mentales : comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Paris : Armand Colin. 435 p.

Roiné C. (2007). – La psychologisation de l'échec scolaire : une affaire d'état. *Congrès international AREF 2007* (Actualité de la Recherche en Education et en Formation). Sherbrooke.

Roiné C. (2008). – *Effets des idéologies pédagogiques sur les pratiques didactiques des professeurs* : cas de l'enseignement des mathématiques dans les classes de SEGPA. (titre provisoire) s/d de Pr. B. Sarrazy. LACES – DAESL. Université Victor Segalen Bordeaux 2

Sarrazy B. (1994). – Peut-on formaliser les procédures de résolution des problèmes d'arithmétique à l'école élémentaire ? *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*. 3. 31-54.

Sarrazy B. (1995). – Le contrat didactique. [Note de synthèse]. *Revue Française de*

Pédagogie. 112. 85-118.

Sarrazy B. (1996). – *La sensibilité au contrat didactique* : Rôle des Arrière-plans dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle 3, Thèse pour le doctorat de l'Université de Bordeaux 2 – Mention Sciences de l'Éducation. 775 p.

Sarrazy B. (1997). – Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 17/2. 135-166.

Sarrazy B. (2002). – Effects of variability on responsiveness to the didactic contract in problem-solving among pupils of 9-10 years. *European Journal of Psychology of education*. XVII. 3. (sous presse).

Sarrazy B. (2002.). – Les hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques. *Educational Studies in Mathematics.* Kluwer Academic Publishers. (Dordrecht. Boston. London). 49. 89-117.

Sarrazy B. (2003). Le problème d'arithmétique dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire de 1887 à 1990. *Carrefours de l'éducation.* n° 15. janv.-juin 2003. 83-101.

Thurston W. P. (1995). – Preuve et progrès en mathématiques, [Trad. de l'anglais par J. Brette avec une introduction de R. Douady]. *Repères-IREM*. 21. 5-26.

Vergnaud G. (1983). – *L'enfant, la mathématique et la réalité* : Problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. Berne : Peter Lang, 217 p.

Wittgenstein L. (1961). – *Tractatus logico-philosophicus* (Suivi des *Investigations philosophiques*). – [traduit de l'allemand par P. Klossowski], Paris : Gallimard, 364 p., coll. TEL.

Zagar, D., Fayol, M. & Devidal, M. (1991). Une stratégie de prise d'information particulière à la lecture de problèmes ? Étude chez des enfants de 10 ans. *Psychologie Française*. *36-2*, 143-149.

Les problèmes arithmétiques : du monde réel au monde de l'école ?

Danièle Coquin-Viennot, maître de conférences, Université de Poitiers

Introduction

L'âge du capitaine, ce n'est pas une légende, c'est un fait. C'est une vieille histoire qui date de 1980, mais qui reste d'actualité même si c'est quelquefois sous des formes plus « soft ». Dans le cas de l'âge du capitaine, on parlera de perte de sens « les mots ne veulent rien dire », « ils ne savent pas lire »…, dans d'autres situations atténuées, on parlera simplement d'étourderie. Mais le plus souvent, on peut interpréter les réponses surprenantes des élèves d'une même façon : les élèves répondent à la question qui, selon eux, correspond le mieux au problème. Nous allons en voir immédiatement une illustration.
Puis nous montrerons que bien d'autres règles d'action et d'autres connaissances implicites forment une *conception* de ce qu'est un problème arithmétique pour l'élève à l'école. Nous chercherons comment et pourquoi ces conceptions sont élaborées, et enfin nous poserons la question de savoir s'il est possible de construire des conceptions plus « exactes ».

Un exemple de recherche (Coquin-Viennot, 2001)

Les problèmes posés à des élèves de CM2 étaient du type suivant: « *Lucien, un marchand de fruits va sur le marché comme toutes les semaines avec une charrette remplie de fruits. Il s'installe et bientôt les clients arrivent. On lui achète d'abord 6 filets d'oranges de 5kg chacun. La personne suivante, après avoir réfléchi un peu, décide d'acheter 4 filets de citrons de 2kg chacun, 1 filet de pamplemousses de 3kg et 8 filets de kiwis de 2kg chacun. Comme il avait bien vendu, Lucien rangea son étalage pour s'en aller. Mais à ce moment là, un jeune garçon arriva en courant et lui acheta 5 filets de pommes golden de 4kg chacun* ».
Les élèves étaient séparés en deux groupes. Dans le premier groupe, la question posée portait sur le poids total de fruits vendus par Lucien ; dans le deuxième groupe, elle portait sur le nombre de filets de fruits vendus. Nous avons appelé « questions inattendues » ou « questions surprises » les questions du deuxième type, celles auxquelles on pouvait répondre sans utiliser toutes les données numériques du problème. Nous avons observé le même taux d'erreur pour les deux questions (environ 25% si on ne compte pas les erreurs de calcul numérique), bien qu'il soit arithmétiquement plus simple de répondre à la deuxième question. L'analyse des erreurs commises par les élèves du deuxième groupe a montré qu'une bonne part d'entre eux faisait une erreur dite « d'anticipation », c'est-à-dire qu'ils répondaient par le *poids* de fruits vendus et non par le *nombre de filets* vendus. *Anticipation*, car ces élèves « n'écoutent » pas (ou n'entendent pas) la vraie question ; ils répondaient à une question *anticipée*, construite au fil de la lecture et qui leur paraissait bien adaptée au texte du problème ; cette question était en accord avec une règle comme « il faut utiliser toutes les données du problème pour répondre à la question ».

Une deuxième variable intervenait dans l'expérience : la place de la question. En effet, de nombreuses recherches (par exemple, Devidal, Fayol & Barrouillet, 1997) ont mis en évidence un résultat désormais célèbre : dans certaines conditions, il y a moins d'erreurs de résolution quand la question du problème est posée au début du texte. Nous pensions que cet effet serait particulièrement vrai avec une question « surprise », l'attention de l'élève étant

focalisée dès le début sur ce qu'on cherche et la réponse à la question surprise pouvant se calculer aisément pendant que le texte était lu aux élèves.
En réalité, c'est l'inverse qui s'est produit : nous avons observé 26% d'erreurs d'anticipation quand la question était posée au début du problème, contre 15% seulement, quand elle était posée à la fin. Tout se passe comme si l'élève construisait la question en prenant connaissance du corps du problème, et que la question construite entrait ensuite en conflit avec la question effectivement posée. Si celle-ci est posée au début, elle est progressivement oubliée au fil de la lecture au bénéfice de la question construite. Alors que si la vraie question est posée à la fin, elle n'est pas oubliée, elle entre de front en conflit avec la question construite et cette dernière l'emporte moins souvent.

Cette présentation un peu longue était destinée à montrer comment des règles implicites (ici : la résolution met en jeu toutes les données du problème) guident l'élève et l'amènent à produire des réponses que l'on peut qualifier de naturelles, ou d'étourderies ou de stupidités selon que l'on approfondit plus ou moins les processus en jeu.

On peut noter que cette règle fonctionne très bien quand on demande aux élèves d'inventer toutes les questions possibles à partir d'un énoncé sans question. C'est toujours la question dite « de complexité maximale », celle qui utilise toutes les données numériques du texte, qui apparaît le plus souvent ; l'effet est encore accentué si l'on ne tient compte que des premières questions inventées (Coquin-Viennot, 2000). C'est encore cette règle qui met en échec les interlocuteurs dans le problème « du train » où il faut compter le nombre de stations et non le nombre de voyageurs qui sont dans le train à l'arrivée. C'est toujours l'illusion que l'on connaît la question dès qu'on a lu le texte, qui fait que le temps passé à lire la question est si faible, qu'on peut considérer qu'elle n'est pas lue (Devidal & al., 1997).

En fait, beaucoup d'autres règles plus ou moins implicites peuvent être mises en évidence quand un élève résout un problème. Dans la suite de cet exposé, nous allons les présenter, puis nous chercherons comment elles se sont construites, puis pourquoi elles se sont construites. Enfin, nous envisagerons la possibilité (ou non) d'éviter cette construction, surtout pour les règles les plus extravagantes.

Un ensemble de règles pour jouer au jeu du Word Problem

Au fil de sa scolarité, l'élève se construit une représentation mentale du problème arithmétique en général. Nous parlons bien ici, *d'un problème en général* et non pas d'un problème particulier qu'on est en train de résoudre.
Cette *conception* au sens didactique du terme, comprend un certain nombre de règles d'actions et d'assertions qui sont mises en œuvre au cours de la résolution.

1. Des règles indispensables pour réussir à résoudre le problème.

Ce sont par exemple celles qui composent le WPS (Word Problem Schema) mis en évidence par de Corte & Verschaffel, (1985).
Ce schéma formel et général pilote la lecture de l'énoncé. Il met en œuvre certaines connaissances des résolveurs concernant la structure, le rôle, et les objectifs « du » problème arithmétique en général, tel qu'il est habituellement proposé à l'école.

(a) Des connaissances concernant les objectifs et le rôle des Word Problem à l'école (par exemple, « aboutir à une réponse numérique à la suite d'un calcul »). Ces connaissances permettent d'éviter les réponses non chiffrées comme « quelques pommes », ou les réponses de type récit comme « Pierre a joué aux billes », quand on demande ce qui est arrivé à Pierre qui avait 8 billes ce matin et qui n'en a plus que 5 cet après-midi.

(b) Des connaissances concernant la structure typique des Word Problem. Elles orientent dès le début la lecture vers les concepts et relations de la base de texte qui permettent d'élaborer le schéma sémantique, et, parallèlement d'éliminer les propositions jugées non pertinentes pour la représentation finale du problème.

(c) Enfin, des connaissances qui permettent d'interpréter les ambiguïtés et de compenser les insuffisances du texte par des inférences. Par exemple, la phrase « Anne lui donne 5 pommes » permet d'inférer un état initial : « Anne avait des pommes (au moins 5) », alors qu'en absence de WPS, un bon nombre de jeunes enfants disent : « ce n'est pas possible, car Anne n'a pas de pommes ».

En bref, une lecture d'énoncé dirigée par le schéma WPS met en œuvre des processus d'interprétation pragmatiques qui s'ajoutent aux processus d'interprétation sémantiques.

2. Des règles qui fonctionnent assez bien quand un élève résout un problème

Par exemple, voici un extrait des règles mises en évidence par Gerofsky, 1996 :

- le problème a une solution ;
- il contient les informations nécessaires pour le résoudre ;
- la tâche peut être réalisée en utilisant les mathématiques que connaît l'élève ;
- il y a une seule bonne réponse ;
- c'est le maître qui juge si la réponse est correcte ou non ;
- le problème a été proposé pour que les élèves mettent en pratique un algorithme récemment appris au cours de mathématiques ;
- …

Ces règles restent « raisonnables », c'est-à-dire qu'elles sont vraies dans beaucoup de situations de résolution de problèmes.

3. Des règles moins souvent adaptées à la situation, et cependant utilisées par un certain nombre d'élèves.

D'autres auteurs (par exemple, Houdebine et Julo, 1988 ; Reusser et Stebler (1997) dans un article intitulé « Tout Word Problem a une solution ») ont montré que les élèves enrichissent cette conception d'autres règles à caractère procédural, plus rarement vraies (encore que…) :

- la solution s'obtient en combinant arithmétiquement les valeurs numériques du texte ;
- il faut utiliser les valeurs numériques écrites en chiffres ;
- il faut les utiliser toutes,
- il faut les utiliser dans leur ordre d'apparition dans le texte ;
- il faut les utiliser une fois et une seule
- si on ne comprend pas le problème, utiliser les mots clés…
- …

Bien entendu, ces règles procédurales ne conduisent pas toujours à la bonne réponse. Comme toujours, il est facile de faire apparaître des erreurs qui manifestent les conceptions des élèves, en pratiquant des ruptures de contrat didactique (Brousseau, 1986, 1990). On peut distinguer deux catégories d'erreurs : celles qui font croire à une perte de *sens* (c'est l'effet « âge du capitaine »), et celles qui montrent seulement une déconnexion du monde réel. Par exemple, la réponse 12,5 quand on demande combien il faut d'autocars contenant 36 soldats chacun pour transporter 450 soldats (Carpenter, Lindquist, Matthews, & Silver, 1983); ou encore, la réponse 10 quand on demande combien de planches d'un mètre on peut obtenir à partir de 4 planches de 2,50 mètres (Kaelen, cité par Reusser & Stebler, 1997). Mais finalement, ces deux catégories relèvent du même phénomène.

Comment et pourquoi ces règles émergent-elles ?

1. Comment ? Par la rencontre fréquente de problèmes stéréotypés

Plusieurs auteurs parlent de « *l'étrange nature des problèmes arithmétiques verbaux à l'école* » (Greer, 1997) pour expliquer la construction de ces règles.

Par exemple, dès 1980, Pearla Nesher évoque la nature stéréotypée des problèmes scolaires qu'elle oppose radicalement aux problèmes quantitatifs de la vie réelle.

Pour elle, le problème du monde réel « Combien va payer Monsieur Smith pour entourer sa piscine d'une clôture ? », deviendra à l'école « Monsieur Smith a une piscine de 12m de long sur 8m de large. Il veut l'entourer d'une clôture posée tout autour à deux mètres du bord. Combien va-t-il payer, sachant qu'un mètre de clôture coûte 10$ (le prix comprend les matériaux et la main d'œuvre) ». Nesher (ibid.) décrit les énoncés de l'école comme « un type de texte vraiment spécial qui ne peut être considéré comme une description de la vie réelle ». Selon elle, trois dimensions caractérisent ce type de texte :

- une dimension sémantique : dans la phrase « 2 garçons vont et 2 garçons courent vers la salle de classe », les verbes aller et courir ne sont là que pour différencier les garçons qui sont 4 en tout, et non pas pour indiquer la rapidité avec laquelle ils se rendent en classe ;

- une dimension référentielle concernant le rôle des objets : les bonbons sont faits pour être comptés et non pour être mangés ;

- une dimension stylistique : aucune information concernant autre chose que la structure logique du problème n'est donnée ; on dit le maximum dans le minimum de texte, ce qui produit des textes laconiques, concis, sans aucune redondance, quelquefois même difficiles du point de vue syntaxique.

De son côté, Gerofsky (1996) montre que souvent les énoncés sont constitués de trois parties : (a) une introduction qui situe l'histoire ; elle n'est pas essentielle pour la résolution, mais elle représente une sorte d'alibi ; (b) un ensemble d'informations numériques et relationnelles ; dans certaines variantes, quelques informations peuvent être intégrées soit à l'introduction, soit à la question ; (c) une question. Pour Gerofsky, cette structure est plus proche de la structure de l'algorithme à appliquer que de la structure d'un problème réel ; au mieux, on pourrait la rapprocher de la structure d'un récit, mais alors, d'un récit vraiment pauvre en évènements.

Ces problèmes stéréotypés sont rencontrés assez souvent à l'école. La résolution d'un bon nombre d'entre eux, surtout dans les premières années de l'école, est compatible avec les règles énoncées ci-dessus, tout au moins les plus courantes. Et c'est ainsi que s'installe et se renforce ce système de règles et de connaissances qui composent la « *conception* » du Word Problem pour l'écolier.

Pourquoi les problèmes sont-ils si souvent stéréotypés ?

Pour Nesher (1980), les écarts entre les problèmes du monde scolaire et leurs correspondants dans le monde réel sont si importants qu'elle propose deux modèles de lecture-résolution différents à appliquer dans l'une ou l'autre situation. L'explication proposée pour cet écart est la suivante : les problèmes de l'école (SCH-PROB) servent à enseigner l'arithmétique appliquée et non à résoudre des questions de la vie réelle (REAL-PROB). Les deux sont associés à des registres différents, sans correspondance.

Gerofsky (1996) reprend cette idée et montre que si la structure du Word Problem est si proche de celle de l'algorithme à utiliser, c'est que les Word problems servent essentiellement à l'enseignement de ces algorithmes.

En accord avec Nesher et Gerofsky, Gravemeijer (1997) considère que le caractère stéréotypé de la plupart des Word Problems résulte du « classroom climate », autrement dit du *contrat didactique* dû à *l'objectif* poursuivi par le maître. En effet, les enseignants interrogés par B. Sarrazy (1996) sur le rôle qu'ils attribuent aux problèmes dans l'enseignement des mathématiques, donnent deux catégories de réponses : (1) « pour rechercher une solution » ; (2) « pour faire appliquer un algorithme de calcul », et souvent, la deuxième catégorie domine. Fayol, Thévenot & Devidal (2005) parlent d'« activité pour modéliser et arithmétiser une situation » vs d'« activité pour exercer des routines de résolution ». Il est intéressant de rapprocher ces résultats de ceux de Staub et Stern (2002), qui ont montré notamment que les maîtres qui raisonnent en termes de « construction de connaissances », obtenaient de meilleures performances en résolution de problème que ceux qui raisonnent en termes de « transmission directe de connaissances ».

Outre les objectifs des maîtres et le rôle qu'ils attribuent aux Word Problems, certaines contraintes institutionnelles, comme celle de l'évaluation des élèves (souci constant dans la classe), poussent à utiliser souvent les problèmes stéréotypés : il est, en effet, plus facile de noter la bonne application d'un algorithme que d'évaluer la qualité de la démarche d'un élève en recherche de solution.

Notons par ailleurs que l'attitude de déconnexion de la réalité se rencontre chez des étudiants d'instituts universitaires de formation des maîtres au même titre que chez les élèves (Verschaffel, de Corte, & Boghart, 1997). Ces étudiants sont dérangés par les remarques des élèves qui les ramèneraient au monde réel et les corrigent ou les évacuent. Il n'est, dans ces conditions, pas surprenant que le phénomène perdure en classe.

Donc, haro sur le problème stéréotypé qui correspond à des objectifs si peu ambitieux pour les enseignants (faire apprendre un algorithme), qui est une solution de facilité pour l'évaluation des élèves, et surtout qui provoque la construction de représentations si caricaturales dans la tête des écoliers. C'est lui qui les conduit à donner des solutions totalement déconnectées du monde réel, voire en apparence, complètement absurdes.

Comment éviter la répétition de ces problèmes stéréotypés ?

Faire entrer le monde réel en classe ?

Après avoir constaté la perte de contact avec le « monde réel », des propositions ont été faites pour tenter de redonner du sens aux situations de résolution de problème. Elles peuvent se résumer par « Il faut faire entrer le monde réel dans la classe ». Deux chemins sont utilisés pour y parvenir.

1. Transposer un problème de la vie réelle en problème scolaire

Revenons au problème de la piscine de Monsieur Smith (Nesher, 1980). Deux transformations essentielles apparaissent quand on passe du problème du monde réel (World problem) au problème de l'école (Word problem) :

(a) La première transformation, et la plus visible sur cet exemple, est que toutes les données nécessaires à la résolution sont présentes dans le texte. C'est une condition toujours satisfaite en situation de résolution. Si cette condition n'est pas remplie, on se trouve dans une autre situation d'enseignement : dire si le problème a une solution, ou repérer la (les) donnée(s) manquante(s) ; ou rechercher l'information, par une sortie de classe sur le terrain de Monsieur Smith, et/ou dans un catalogue de bricolage ; lire un tableau, etc. ;

(b) La deuxième transformation, est la réduction de la complexité scientifique qui peut prendre deux formes :

- la première réduction est simplement quantitative : on donne un prix au mètre de clôture qui inclut grillage, piquets (tous les combien, les piquets ?) et main d'œuvre ; alors qu'on aurait pu donner des informations séparées…Il n'y a pas rupture dans le niveau de difficulté, au sens où l'élève sait résoudre chacune des étapes utile à la solution finale ; simplement, on réduit le nombre d'étapes parallèles pour que le problème soit moins long à résoudre, …et on évite les étapes qui ne sont pas à l'ordre du jour dans le programme en cours !
- la deuxième réduction, bien connue des physiciens, entraîne une rupture qualitative dans le niveau de complexité : un chariot roule sur un plan incliné sans glissement et sans frottement…avec frottements et glissements, le problème ne serait pas seulement plus long à résoudre, il serait sans solution pour les élèves du niveau envisagé.

Les deux transformations que nous venons de décrire, opèrent une transposition de la réalité.
Que ce soit pour des questions de niveau ou de temps scolaire disponible, elles sont *obligatoires*. Cette simplification (modélisation ?) de la réalité sera d'autant plus forte que les acquisitions visées sont plus fondamentales, et doivent être automatisées. Cette simplification à outrance, *contrainte* par les conditions de l'apprentissage scolaire, aboutit à la création d'énoncés stéréotypés, qui ont pris sérieusement leurs distances avec la réalité.

2. Contextualiser un problème

Une autre façon de faire ressembler un problème de l'école à un problème du monde réel, c'est de prendre un problème de type stéréotypé, et de le plonger dans une situation plus réelle ; c'est à dire, l'immerger dans une histoire faite d'actions de la vie courante : maman va au marché…la famille Martin va camper au bord de la mer…On donnera suffisamment de détails concrets et familiers pour créer un co-texte plausible : les circonstances de la sortie, les émotions de chacun, les raisons qui permettent d'expliquer les évènements décrits…Cela s'appelait autrefois l'habillage du problème (le comble de l'habillage est atteint lorsque le maître veut faire réaliser un calcul numérique aux élèves et qu'au lieu de demander combien font 18 +25, il invente un problème dont la solution est 18 + 25). Même ainsi travesti sous les beaux atours du réel, un problème de l'école reste un problème de l'école ; il peut être plus motivant, plus concret, plus familier, mais le déguisement ne modifie pas les caractéristiques du problème ; celui-ci répond toujours aux contraintes de simplification décrites ci-dessus. Roth (1996) montre que les élèves ne sont pas dupes, qu'ils savent détecter l'habillage, et que le simple emboîtement d'un problème dans une histoire ne suffit pas à le contextualiser, même si cela permet parfois de motiver certains enfants, ou de déculpabiliser certains maîtres.

D'ailleurs, les élèves savent parfaitement inventer des problèmes de type SCOOL-PROB en faisant des tentatives hardies pour ancrer dans le réel des algorithmes en cours d'étude ; nous avons tous rencontré des énoncés d'élèves comme : « Maman achète 1 fer à repasser ; puis elle achète 6 fers de plus… » (Nesher, 1980), ou encore comme : « Dans une bouteille de limonade, il y a 500 bulles. ¾ des bulles sont plus petites que les autres… » (Sensevy, 1996).

Problèmes de l'école ou problèmes du monde réel…

Les premiers conduisent aux erreurs que nous avons analysées en première partie : activation d'automatismes sans réfléchir.
Les seconds transforment la tâche de résolution en la rendant multiforme. Deux conséquences immédiates en résultent : (a) les élèves moyens auront du mal à repérer la part du « problème arithmétique » dans cette multi-tâche; (b) le temps scolaire nécessaire pour mener à bien ce travail est si important qu'il ne permet pas un nombre suffisant de *répétitions*, condition indispensable à l'apprentissage des automatismes en question.
La réponse s'il en faut une sera une réponse de Normand !
Les deux types de problèmes sont nécessaires. Ils correspondent à des objectifs différents pour le maître et à des activités différentes pour les élèves. En général, les bons élèves savent reconnaître le contrat didactique dans lequel ils se trouvent. Comme d'habitude, la question se pose surtout pour les moins bons élèves.
Ce sera au maître de trouver le bon dosage…d'où la nécessité absolue de rendre le maître conscient de ses choix quand il propose un problème à ses élèves.

Pour finir, je voudrais raconter une histoire sur une bulle du monde de l'école plongée dans le monde réel : *l'écolière et la crémière.* L'écolière part chez la crémière pour acheter des fromages. Sa maman lui a donné un billet de 20 euros. Quand l'écolière a fini de choisir ses fromages, la crémière lui dit que ça fait treize euros soixante. En donnant son billet, l'écolière se dit que la crémière doit lui rendre 20 – 13,60 = … Pendant ce temps, avant même que l'écolière ait fini de poser mentalement la soustraction (et donc, bien entendu avant d'avoir la moindre idée du résultat), la crémière plonge la main dans la caisse et commence à rendre la monnaie en énonçant une litanie bizarre : « treize quatre-vingts, quatorze, quinze et cinq vingt ». L'écolière se sent alors plongée dans un monde étrange où les vendeuses savent rendre la monnaie sans avoir calculé le résultat d'une soustraction, et sans même avoir eu le temps d'amorcer un calcul mental. De plus, la somme à rendre est versée à la petite fille en commençant par les petites pièces (20 centimes) et en progressant jusqu'au billet de 5 euros, ce qui est une bien curieuse habitude quand on cherche à constituer une somme de 6,40 euros.
À vous de juger où se trouve le monde réel pour la petite fille !

Bibliographie

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*, 33-116.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*, 309-336.

Carpenter, T. P., Lindquist, M., Matthews, W. & Silver, E. A. (1983). Results of the third NAEP mathematicsassesment : Secondary School. *MathematicsTeacher, 76*, 652-659.

Coquin-Viennot, D. (2000). Lecture d'énoncés de problèmes arithmétiques : effet d'une introduction thématique sur la construction de la représentation. ***Archives de Psychologie, 68***, 41-58.

Coquin-Viennot, D. (2001). Problèmes arithmétiques verbaux à l'école : pourquoi les élèves ne répondent-ils pas à la question posée ? *Enfance, 2***,** 181-196.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior, 4*, 3-21.

Devidal, M., Fayol, M., & Barrouillet, P. (1997). Stratégies de lecture et résolution de problèmes arithmétiques. *L'Année psychologique, 97*, 9-31.

Fayol, M., Thévenot, C., & Devidal, M. (2005). Résolution de problèmes/résolution de problèmes arithmétiques verbaux. In M-P. Noël (Ed.), approche neuropsychologique et développementale des difficultés de calcul chez l'enfant. Marseille : Editions Solal.

Gerofsky, S. (1996). A Linguistic and Narrative View of Word Problems in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics, 16*(2), 36-45.

Gravemeijer, K. (1997). Solving Word Problems : a Case of Modelling ? *Learning and Instruction, 7*, 389-397.

Greer, B. (1997). Modelling Reality in Mathematics Classrooms : the case of Word Problems. *Learning and Instruction, 7*, 293-308.

Houdebine, J., & Julo, J. (1988). Les élèves en difficulté dans le 1er cycle de l'enseignement secondaire : pour une intervention didactique différenciée. *Revue Française de Pédagogie, 84*, 5-12.

Irem de Grenoble. (1980). Quel est l'âge du capitaine. *Bulletin de l'APMEP, 323*, 235-243.

Nesher, P. (1980). The Stereotyped Nature of School Word problems. *For the Learning of Mathematics, 1*, 41-48.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every Word Problem has a Solution - the Social Rationality of Mathematical Modeling in Schools. *Learning and Instruction, 7*, 309-328.

Roth, W-M. (1996). Where Is the Context in Contextual Word Problems ? : Mathematical Practices and Products in Grade 8 Students' Answers to Story Problems. *Cognition and Instruction, 14*, 487-527.

Sarrazy, B. (1996). La sensibilité au contrat didactique. Rôle des Arrière-plans dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle 3. Thèse pour le doctorat de l'Université de Bordeaux II.

Sensevy, G. (1996). Fabrication de problèmes de fraction par des élèves à la fin de l'enseignement élémentaire. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 261-288.

Staub, F. & Stern, E. (2002). The Nature of teachers' Pedagogical Content Beliefs Matters for Students' Achievement Gains : Quasi-Experimental Evidence From Elementary Mathematics. *Journal of Educational Psychology, 94,* 344-355

Verschaffel, L., De Corte, E., & Borghart, I. (1997). Pre-Service Teachers' Conceptions and Beliefs About the Role of Real-World Knowledge in Mathematical Modelling of School Word Problems. *Learning and Instruction, 7,* 339-360.

Une question curriculaire de l'enseignement élémentaire des mathématiques : la « résolution de problèmes »

Alain Mercier, professeur à l'INRP, UMR-P Apprentissage Didactique Evaluation Formation (INRP, université Aix-Marseille I, IUFM Aix-Marseille)

Je voudrais d'abord remercier l'Inspection générale pour me donner ici l'occasion de développer devant vous des idées que portent de nombreux didacticiens. Notre tâche est l'observation et la compréhension des pratiques réelles des professeurs, qui enseignent, et des élèves, qui étudient. Nous observons que les professeurs enseignent en tentant le plus souvent de satisfaire aux injonctions qui leur viennent du monde social par le canal de leur hiérarchie. Mais trop souvent et malgré leurs efforts, cette action est insuffisante pour satisfaire aux besoins de la société. L'observation des contraintes du système et la compréhension des difficultés des professeurs comme de celles des élèves nous semble la seule voie pour un changement quel qu'il soit, parce que cela permet de partager les responsabilités des dysfonctionnements et de déterminer les directions dans lesquelles travailler. Je suis ici aujourd'hui pour commenter à ma manière de chercheur en didactique des mathématiques le rapport sur l'enseignement des mathématiques à l'école, car l'inspection a trouvé que ce travail difficile « faire résoudre : des problèmes : de mathématiques : par les élèves : pour qu'ils apprennent des mathématiques » mettait trop souvent les enseignants en difficulté ; chacun des cinq termes de la demande fait problème, pour un professeur.

Mon exposé vise plus largement à introduire des questions de développement curriculaire, dans l'enseignement obligatoire, sur un objet dont la définition n'est pas toujours claire et comprise : la « résolution de problèmes ». Ce faisant, je n'oublie pas que la question qui nous est posée aujourd'hui est en partie l'effet d'un certain nombre d'injonctions institutionnelles précédentes, c'est pourquoi je vais commencer quelques remarques d'histoire, puis quelques remarques comparatives avec d'autres systèmes d'enseignement, avant d'attaquer la question elle-même.

On pourrait en débattre en historiens, mais on peut dire que l'école maternelle est mise en place, en France, par madame Kergomar, en 1923. Plus d'un demi-siècle plus tard, l'enseignement des écoles maternelles est en France si réussi et incontesté qu'il arrive même à évoluer spontanément en phase avec la société et que personne ne pense le changer. Mais dans un premier temps, le ministère regroupe l'inspection des écoles maternelles et de l'enseignement spécial (1972) puis, comme la manière de faire est connue et qu'elle a pour justification les travaux en psychologie de l'enseignement reconnus à l'époque (PPO), le ministère décide de fixer la situation par un écrit (en 1977, si je ne me trompe). En 1981, la spécialité de directrice d'école maternelle devient accessible après trois ans d'exercice au lieu de huit. La formation spécialisée des institutrices de maternelle va bientôt disparaître. Pourtant, un nouveau texte sur l'enseignement dans les écoles maternelles sort tous les cinq ans et aujourd'hui, ce dispositif lui-même se trouve mis en cause dans la presse. On s'aperçoit alors qu'entre 1927 et 1979 il n'y avait eu aucun texte régulateur sur le sujet mais seulement, si l'on peut dire, une réunion annuelle des institutrices de maternelle, organisée par l' l'Association Générale des Institutrices et Instituteurs des Écoles et classes Maternelles publiques (AGIEM) à laquelle assistaient systématiquement les inspectrices, et les formatrices d'école normale : le processus de régulation qui avait produit une institution capable d'évoluer en phase avec la société environnante a été détruit par la croyance qu'on peut « piloter » une institution tout en économisant sur ce qui fait tenir ensemble ses éléments : les personnes. Le texte ministériel s'est trouvé incapable de produire l'effet qu'il revendiquait,

l’autorité n’y suffisait pas : la multiplication des coups de barre que sont les textes régulateurs en témoigne. La question relève du fonctionnement des organisations, elle est centrale pour ce qui nous intéresse. Mon métier de chercheur est ici d’instruire les débats que vous aurez à propos de ce qu’il serait bon de changer à la manière dont les professeurs enseignent. Je vais donc rendre compte de mes observations du travail des professeurs lorsqu’ils aident les élèves à étudier et du travail des élèves qui étudient pour apprendre.
Et j’observe ceci : les agents que sont les professeurs ne peuvent pas se contenter de dire ce qu’il y a à apprendre pour que les élèves puissent effectivement apprendre, et les corps d’inspection, les formateurs et les membres des administrations ne peuvent se contenter de dire ce qui doit être enseigné pour que les professeurs puissent le faire. Les professeurs ne peuvent qu’*instituer en élèves* les enfants qui leur sont confiés c'est-à-dire, les *conduire* à *étudier*, *collectivement*, *des questions*, choisies pour leur capacité à faire advenir des *réponses*, *collectivement acceptées*, *socialement garanties*, sachant que l’on considèrera ces réponses comme des *preuves de savoir*.
Mais la manière de faire un travail d’institution ne se décrète pas, parce que c’est le résultat de pratiques humaines coopératives (§Bagin & d'Amore, 2005). Il faut que des professeurs, des formateurs de professeurs, des inspecteurs du système soient institués, que des établissements d’enseignement, des plans d'études, etc. soient bâtis puis, que tout le monde agisse, et interagisse avec les parents et les institutions responsables des savoirs enseignés, pour que l’ensemble vive. Les agents de l’institution ont donc à penser ensemble et à mettre en œuvre la manière dont, dans notre société, les enfants seront institués en élèves et apprendront, car personne ne peut décider seul de la manière de pratiquer comme le disait déjà Durkheim il y a un siècle, dans l’article « Pédagogie » du Dictionnaire de Pédagogie de Ferdinand Buisson (texte aujourd'hui entièrement numérisé, consultable sur le site de l’INRP).

> *...l’éducation en usage dans une société déterminée et considérée à un moment déterminé de son évolution, est un ensemble de <u>pratiques</u>, de <u>manières de faire</u>, de <u>coutumes</u> qui constituent des faits parfaitement définis et qui ont la même réalité que les autres faits sociaux. Ce ne sont pas, comme on l’a cru pendant longtemps, des combinaisons plus ou moins arbitraires et artificielles, qui ne doivent l’existence qu'à l’influence capricieuse de volontés toujours contingentes. <u>Elles constituent</u>, au contraire, <u>de véritables institutions sociales</u>.*
>
> *.../...*
>
> *Il n'est pas d’homme qui puisse faire qu’une société ait, à un moment donné, un autre système d’éducation que celui qui est impliqué dans sa structure, de même qu’il est impossible à un organisme vivant d’avoir d'autres organes et d’autres fonctions que ceux qui sont impliqués dans sa constitution.*

Les anthropologues modernes le disent un peu autrement, mais leurs observations montrent que les institutions sociales nous donnent, chaque fois que nous n'y prenons pas garde, des « prêts à penser » (Douglas, 1999) qui se traduisent bientôt en actions automatiques. Mesurant l’ampleur de la tâche qui nous échoit et la responsabilité qu’il y a à prétendre, en dehors du champ ordinaire des débats de vérité que tiennent entre eux les scientifiques, dire du vrai en matière sociale, j’aurai donc une analyse et des propositions prudentes. Ma remarque sur l’évolution des maternelles vise à nous rappeler que, si l’on peut dire que les mammouths meurent de ne pas avoir évolué, on peut aussi penser qu’ils ont disparu en raison de changements trop brutaux de leur écosystème : il me semble que ce pourrait être aujourd'hui la situation d’un enseignement des mathématiques soumis à des injonctions paradoxales.

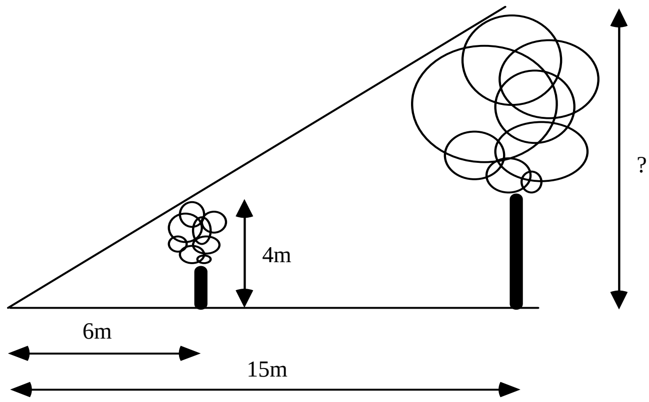
Partie 1 : Évolution et constantes. De l’arithmétique pratique du CEP aux problèmes de PISA

Les problèmes de l’arithmétique pratique

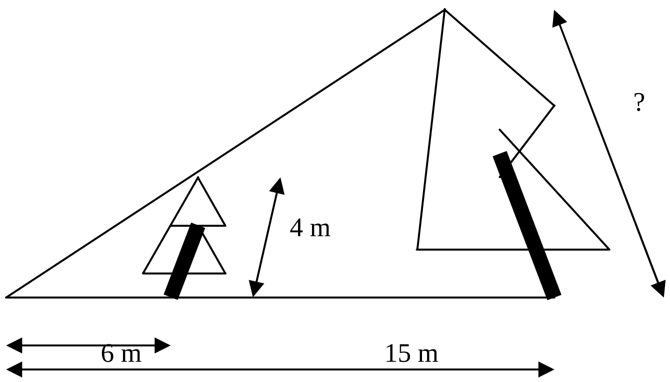
Depuis le travail de Condorcet proposant l’enseignement du système de numération décimale et des opérations qu’il permet comme *l’enjeu* de l’enseignement élémentaire des mathématiques à tous (ce que l’on appelait naguère « arithmétique »), l’enjeu de l’enseignement élémentaire républicain en mathématiques est la compréhension et l’exécution rapide de « tous les comptes qui se font ordinairement aux affaires des hommes » comme l’avait proposé deux siècles plus tôt Simon Stevin, l’inventeur de la numération décimale de position et le promoteur de son usage universel dans les opérations de mesure (*la Disme*). L’ensemble des problèmes traités dans le cadre des programmes de l’arithmétique pratique, que ce projet définit, est demeuré stable.
Jusqu’à tout récemment, les techniques de calcul n’avaient pas plus varié que les techniques élémentaires de mesure des grandeurs. Ces techniques élémentaires étaient les techniques usuelles. *L’unification des problèmes, qui permettait de les enseigner tous ensemble tout en les classant par métier, venait justement de l’unification des algorithmes du calcul que permettait le système décimal universel de mesure et le fonctionnement analogique des appareils de mesure qui tous, transformaient la grandeur à mesurer en longueur repérée sur la graduation d’une règle ou d’un cadran*. De ce fait (comme le montrent Assude et Gispert, 2003), la formation des professeurs consistait à faire la théorie des appareils de mesure, la théorie des systèmes de numération et la théorie des opérations selon les systèmes de nombres et les types d’objets sur lesquels elles portaient. Les instituteurs, recrutés sur concours du niveau d’un Brevet Supérieur, connaissaient ainsi en pratique (leur CEP l’attestait) comme en théorie (leur BS l’attestait) l’ensemble des problèmes qu’ils avaient à enseigner (ce qu’ils apprenaient en trois ans d’école normale). Le lien entre pratiques sociales et pratiques scolaires, qui est la condition d’une lisibilité des enseignements, semblait solide (Brassac, 2007).
C’est la réforme des années 70 qui déstabilise le système, non pas en introduisant de nouveaux contenus mathématiques mais en changeant l’enjeu même de l’enseignement élémentaire, qui ne débouche plus sur un certificat de fin d’études. Car la réforme accompagne la mise en place du collège unique et de l’enseignement pour tous jusqu'à 16 ans, mais le collège unifie les classes du primaire supérieur avec les petites classes des lycées qui conduisent à la préparation du baccalauréat, au bénéfice de ces dernières. En France comme en Belgique, la revendication de démocratisation est interprétée comme la nécessité d’ouvrir à tous l’accès à des études secondaires (Le mot d'ordre « 80% d’une classe d’âge au baccalauréat » en témoigne). Cette orientation l’emportant, notre programme signe l’entrée de tous les élèves, accueillis dans le collège unique, dans les problématiques mathématiques de l’enseignement secondaire. Le choix alternatif aurait été l’extension au collège de l’esprit de l’enseignement primaire et le renouvellement des théories fondant l’étude des classes de problèmes mathématiques du quotidien qui forment la « mathematical literacy » chère à PISA, mais nous avons pris d'autres chemins.

Une observation venue des évaluations internationales

Le rang de la France dans les classements nous intéresse, mais comme l’on sait que les systèmes d’évaluation orientent l’activité des organisations, suivre cette idée et mettre en avant ce classement-là suppose que le programme d’études soit redéfini, à court terme, par les items de l’évaluation PISA. Or, nombreux sont les commentateurs qui ont montré que ces items ne sont pas compatibles avec nos choix actuels. Je prendrai un exemple rapide. Il tient aux premières évaluations internationales. Un item s'est avéré particulièrement bien réussi par nos élèves, il s'agissait officiellement d'une application du théorème de Thalès pour déterminer la taille d'un grand sapin connaissant celle d'un plus petit, et les élèves de 4ème le réussissaient mieux que tous autres européens.



Seulement, le théorème était enseigné en 3ème, en France, à cette époque. Le résultat ne fut pas publié par le ministère, je ne sais pas précisément pour quelles raisons. En didacticiens, nous considérons que, statistiquement, « ce qui n'est pas enseigné n'est pas appris », ce qui nous a conduits à penser que la question était indirectement enseignée. L'enquête que nous avons menée pour le confirmer a montré, en effet, que l'exemple des deux sapins sert depuis le CM1, dans de nombreux ouvrages d'enseignement, pour expliquer la proportionnalité : ainsi, les élèves français de 4ème connaissent le calcul sans le théorème qui le justifie, depuis quatre ans au moins ! Le phénomène est connu (Havelange, V., Lenay, C. & Stewart, J., 2002).



Si l'on pose la question l'année suivante, à des élèves qui connaissent le théorème (Matheron, 2002), la réussite *diminue*, car il n'est pas évident d'employer le théorème quand rien n'indique que les sapins peuvent être modélisés comme deux droites parallèles. Ainsi, de tels problèmes peuvent être résolus par un effet du type « âge du capitaine », les élèves répondant sans mobiliser les connaissances attendues. Pour aller plus loin, Matheron a proposé le même énoncé avec des sapins non parallèles comme ci-dessus et il a obtenu les mêmes réponses (fausses cette fois) pour toutes les classes sauf les élèves à qui le théorème de Thalès avait été enseigné : ceux là, qui hésitaient, rejettent alors majoritairement un calcul de proportionnalité. Mais les auteurs de manuels ont choisi cette « activité préparatoire » pour leur chapitre sur le théorème de Thalès, selon un procédé didactique constant (Matheron, Y. & Mercier, A., 2004).

Un problème actuel, venu de PISA

C'est aussi un exemple ancien puisqu'il date de 1995-98. J'ai donc choisi sur le site de PISA le problème « Rock concert » de « l'unité mathématique 12 », dont voici l'énoncé :

> « Pour un concert de rock, un terrain rectangulaire de 100 m par 50 a été préparé pour recevoir les participants. Toutes les places ont été vendues et le terrain a été rempli par tous les fans, qui étaient tous debout. Parmi les estimations du nombre de participants figurant ci-dessous, laquelle vous paraît réaliste ?
>
> A. 2000
>
> B. 5000
>
> C. 20 000
>
> D. 50 000
>
> E. 100 000 »

Indépendamment du fait que le nombre médian fait un effectif plausible, les précédents semblant bien petits et les suivants bien grands, le calcul possible donne pour la réponse C : 100 m x 50 m = 5000 m2 de surface soit 20000 participants /5000 m^2 = 4 participants au mètre carré et 20 participants au mètre carré pour la réponse E. Est-ce réaliste ?
Une enquête de quelques minutes dans les moyens d'enseignement suisses montre en 6ème année primaire, notre sixième, une question semblable sur le volume, qui propose à la classe de tenter de rentrer dans un espace d'un mètre cube, réservé dans un angle de la salle de cours. J'en déduirais volontiers que dans l'enseignement de certains pays, le rapport au calcul de volume comprend *l'évaluation du volume corporel d'un humain* et qu'il en va de même pour la surface : *certains élèves doivent savoir qu'ils ont un encombrement minimum au sol d'environ 15 dm^2* soit bien moins de 25 dm^2. Cela change complètement la difficulté de l'exercice si l'évaluation s'appuie sur une connaissance déjà installée ou une expérience préalable. Ces élèves n'ont pas, comme les petits Français d'aujourd'hui, besoin d'évaluer leur largeur corporelle (50 cm et au plus, 60 cm) et leur épaisseur (15 cm et au plus, 25 cm) pour savoir leur emprise au sol (750 cm^2 et au maximum, 1500 cm^2) afin d'obtenir une estimation de la densité possible des spectateurs, au mètre carré :

> 100 cmX100 cm : 750 cm^2/personne = 12 personnes (au plus)
> 100 cmX100 cm : 1500 cm^2/personne = 6 personnes (sans difficulté)
>
> 5000X6 = 30000 et 5000X12 = 60000 ce qui donne une estimation pour le concert. Alors, 20000 personnes semble le nombre raisonnablement prévu par les organisateurs pour que les spectateurs puissent bouger, 50000 serait possible.

Or, je ne crois pas que, par exemple, beaucoup parmi vous puissent donner spontanément une évaluation de leur volume corporel en dm^3 ou en cm^3 , qu'ils aient calculé un jour les dimensions de la boîte correspondant à ce volume, qu'ils penseraient spontanément que leur poids en kg est une évaluation par défaut de leur volume en dm^3, ou qu'ils aient jamais calculé combien d'élèves tiendraient dans une boîte d'un mètre cube ! Les problèmes dits concrets appartenaient hier à des professions ; les pratiques mathématiques sont devenues tellement automatisées que les *problèmes concrets* appartiennent aujourd'hui nécessairement à des classes de problèmes tout à fait scolaires et la réussite à la plupart d'entre eux ne témoigne sans doute pas des savoirs qu'on lui attribue. Une enquête même sommaire montre que souvent, un même problème se retrouve à trois ou quatre niveaux différents : signe que l'on considère que leur fréquentation n'a pas pour objet un apprentissage déclarable mais seulement une familiarité motivée par leur proximité supposée ou affirmée avec des pratiques non scolaires que les mathématiciens peuvent voir comme des pratiques à mathématiques.

Quelle est l'organisation des problèmes posés ?

Les problèmes dits concrets appartenaient hier à des professions ; mais les pratiques mathématiques professionnelles sont devenues tellement automatisées que les questions posées appartiennent aujourd'hui nécessairement à des classes de problèmes qui sont tout à fait scolaires, même quand ils ont l'apparence du quotidien. De ce fait, la réussite à la plupart d'entre eux ne témoigne sans doute pas des savoirs qu'on lui attribue et il y a peu de différence entre ce problème et le suivant :

> « Dans la classe, il y a quatre rangées de sept tables. Parmi les calculs de l'âge de la maîtresse figurant ci-dessous, lequel vous paraît réaliste ?
>
> A. 11 ans
>
> B. 28 ans
>
> C. 256 ans »

Le résultat de la multiplication 4×7 est, sans aucun doute, le seul pertinent. Cette réponse sera massivement choisie et elle ne montrera pas que les élèves « savent évaluer, grâce à l'ordre de grandeur d'un résultat, la pertinence d'une opération ». C'est « un effet du contrat didactique », l'effet « âge du capitaine » observé la première fois de manière systématique par une équipe de didacticiens de l'IREM de Grenoble. Nous en avons vu une des formes, dans le cas de la hauteur des arbres, et nous en avons imaginé une autre, ci-dessus.

> Ainsi, les problèmes dont parle le terme de *problèmes* utilisé aujourd'hui dans les programmes n'ont plus, même dans les programmes de l'enseignement élémentaire, le sens du terme utilisé dans l'expression « problèmes de marchand de vins ».

On les rencontrait pour le certificat de fin d'études primaires et ceux là relevaient d'un calcul barycentrique visant à déterminer soit, le prix des mélanges de plusieurs vins de prix connu soit, les proportions de chaque constituant d'un mélange, à vendre à un prix cible. Ce calcul se faisait par une technique extrêmement pratique dite « la croix des mélanges », dont les instituteurs étudiaient la théorie à l'École normale. Les éléments de théorie permettaient alors aux futurs professeurs de retravailler la classification de problèmes dont le sens venait de leur usage social. La fameuse « règle de trois » appartient à ce monde de pratiques aujourd'hui révolues. Les problèmes enseignés dans les systèmes éducatifs où l'enjeu s'est conservé sont tout aussi « normalisés » et donc « scolaires » mais ils sont bien moins évidemment mathématiques, parce que les savoirs utiles à leur traitement ne sont pas déclarés (Allal, 2001). Comme les problèmes du CEP, ils ne sont pas classés selon les savoirs mathématiques que leur attaque suppose. Mais ils ne sont même plus classés en thèmes professionnels (escompte, marchands de vins, coût unitaire, etc.) ou en techniques de résolution (intérêts simples, croix des mélanges, règle de trois, etc.)

Partie 2 : Faire des mathématiques, est-ce résoudre des problèmes ?

Pourquoi le mot d'ordre figure-t-il dans tous les programmes ?

Le mot d'ordre *« faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes »* est relativement récent dans le système d'enseignement des mathématiques, en France. Il est pourtant presque partout présent. On peut lire, sur le premier texte relatif au cycle des approfondissements, accessible sur le site du ministère de l'Éducation nationale, la déclaration suivante :

> « *Les connaissances et les savoir-faire développés au cycle 3 doivent contribuer au développement d'une pensée rationnelle, à la formation du citoyen, et permettre de bénéficier au mieux de l'enseignement donné au collège.* La résolution de problèmes est au centre des activités mathématiques *et permet de donner leur signification à toutes les connaissances qui y sont travaillées : nombres entiers et décimaux, calcul avec ces nombres, approche des fractions, objets du plan et de l'espace et certaines de leurs propriétés, mesure de quelques grandeurs* »

Ici, cette activité est motivée par le sens qu'elle donne aux connaissances et l'argument montre que *les connaissances ne sont pas enseignées comme des réponses à des problèmes*, ce que l'on pourrait légitimement regretter. Le mot de *problème* ne figure pas immédiatement pour le cycle des apprentissages, dont la description est normalement centrée sur les contenus :

> « En proposant une étude structurée des nombres, des formes, des grandeurs et de leur mesure, le cycle 2 marque l'entrée véritable des élèves dans l'univers des mathématiques. La compréhension des nombres, notamment de leur écriture chiffrée (numération décimale), et le calcul mental sous toutes ses formes (résultats mémorisés, calcul réfléchi) constituent des objectifs prioritaires. »

Mais lorsque l'on consulte le texte entier relatif au cycle 2, on peut lire dès les premières lignes que :

> « Élaborées comme *réponses efficaces à des problèmes*, les premières notions mathématiques sont identifiées, puis étudiées dans le but d'être utilisables *pour résoudre de nouveaux problèmes*. »

Ce qui correspond très précisément à la philosophie générale des textes de tous les enseignements de l'école obligatoire. On peut remarquer que le texte relatif au collège est dans le même esprit. Il le développe en proposant d'autres éléments de l'activité mathématique pouvant être proposée aux élèves :

> « Au collège, l'enseignement des mathématiques entraîne les élèves à *la pratique d'une démarche scientifique*, en développant progressivement les capacités d'expérimentation, de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. Par un travail progressif sur les quatre années de collège, *les élèves résolvent des problèmes*, rencontrent des représentations sous forme de modèles de quelques situations, comprennent le sens du calcul algébrique, découvrent les propriétés universelles de figures géométriques et font l'apprentissage de la démonstration. »

La résolution de problèmes au cycle 3 permet de donner leur signification aux connaissances qui y sont travaillées, et elle constitue un point essentiel de l'activité du collège, dans une liste large d'objets où les problèmes côtoient *les modèles* de quelques situations, *le sens du calcul* algébrique, *les propriétés* universelles des figures géométriques, *la démonstration*.

Les problèmes sont donc *le moteur de l'activité mathématique* et donnent le sens ou la signification des apprentissages, qu'ils demandent. Ils n'en sont pas le tout. L'enseignement peut cependant être pensé comme une genèse artificielle des savoirs, réalisée sous la direction d'un professeur par un groupe d'élèves organisé en communauté scientifique autour de problèmes dont ils fournissent une réponse efficace. La chose s'argumente aisément :

> Les modèles des situations problématiques sont bien des représentations et ces représentations permettent de résoudre efficacement les problèmes ;
> - le calcul algébrique est par exemple un système de représentation socialement stabilisé parce que ses manipulations sont particulièrement efficaces ;
> - les figures géométriques donnent une représentation universelle des configurations spatiales ;
> - la démonstration est une forme argumentative venue de l'usage réglé de ces représentations.

S'il y a des mathématiques à enseigner à tous, parce qu'elles fondent toutes les pratiques mobilisant des mathématiques, que ce soit dans le travail scientifique ou dans la société, ce sont bien celles-là et chacun peut en être d'accord. Faire des mathématiques, c'est *utiliser* des outils pour résoudre des problèmes et donc aussi, *construire* des outils permettant de résoudre des problèmes ou encore, *étudier* des outils et les problèmes qu'ils permettraient de résoudre. Résoudre des problèmes est le moteur et le motif de l'activité mathématique, ce n'est pas rien mais ce n'en est pas le tout, le texte des programmes dit aussi cela. Les inventeurs de la didactique des mathématiques ne sont pas les premiers à insister sur ces questions, Lebesgue commençait, en 1935, son cours à l'École normale supérieure de Sèvres sur « la mesure des grandeurs », par cette déclaration :

> *« Un tout jeune enfant, invité à prendre un bonbon et à en donner à ses deux sœurs, s'assurera d'abord de sa part, puis portera un bonbon à l'une de ses sœurs et reviendra en chercher un autre pour le porter à son tour. Plus âgé, il évitera ses allées et venues ; il prendra les trois bonbons en disant « pour moi, pour Louise, pour Renée ». On imagine volontiers .../... que par un mécanisme analogue les hommes en sont arrivés, quand ils veulent comparer deux collections, à compter ; c'est-à-dire à comparer les deux collections à une même collection type, la collection des mots d'une certaine phrase. Ces mots sont appelés des nombres. Pour compter ou dénombrer, on attache mentalement un objet différent de la collection envisagée à chacun des mots successifs de la phrase (ou suite) des nombres ; le dernier nombre prononcé est le nombre de la collection.* Ce nombre est considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte-rendu complet.
> Un résultat expérimental sert à dispenser d'autres expériences. *Les règles des quatre opérations nous dispensent des opérations de dénombrement pour certaines collections... »* Lebesgue, 1975.

Lebesgue signifie à la fois par ce texte le caractère d'activité scientifique expérimentale des mathématiques, le fait que les représentations obtenues sont des modèles de certaines situations expérimentales et le fait que ces modèles permettent de résoudre certaines classes de problèmes qui en font le sens. Lebesgue insiste sur les conséquences de cette déclaration et on peut inviter tout professeur de mathématiques à s'y reporter car il est lisible par toute personne cultivée.

Si l’on suit Lebesgue, on doit considérer que *la résolution de problèmes devrait déboucher normalement sur la mise en place de représentations nouvelles et sur la mise à l’épreuve des systèmes de représentation connus*, pour produire les systèmes de représentation (de modélisation) les plus généraux possibles, en éprouver l’économie et en apprendre les techniques de manipulation. Mais cela ne se produit jamais complètement sans l’intervention du professeur, dont le métier n'est plus l’exposé *ex cathedra* des manipulations attendues mais l’accompagnement de la production de représentations par les élèves (Brousseau, 2005 ; Vergnaud, 1998) et l’organisation de l’étude collective des représentations socialement reçues lorsque leur grande efficacité peut être éprouvée en pratique, par les élèves (Digneau, J.-M., 1980 ; Pérez, J., 1984 ; Jendoubi, V., 1992/2003 ; Luria, A. R., 1929/1998).

Faire des mathématiques, à l’école, c’est pour en apprendre !

- On peut demander si ce mot d’ordre de l’enseignement par problèmes, qui se développe dans une argumentation de plus en plus construite au long de la progression dans les apprentissages, a été mis en avant récemment et ce qui se disait auparavant.

- On peut ensuite remarquer la progression d’un cycle à l’autre et pour le collège, qui mérite d’être étudiée et commentée puisque les mathématiques proposent en fin de compte non seulement le développement d’une pensée rationnelle mais, comme le disent fort bien les textes, l’expérience pratique d’une démarche scientifique.

- On peut enfin rapporter à ces déclarations les termes du rapport de l’Inspection générale, qui a observé la grande difficulté des professeurs d'école avec la tâche qui leur est ainsi demandée : *enseigner des mathématiques en faisant faire des mathématiques aux élèves*. C’est l’enjeu de mon intervention.

- On peut demander alors, ce sera la dimension polémique de mon intervention, si le mot d’ordre n’appellerait pas trop souvent une utopie, *parce que les conditions techniques de sa mise en œuvre efficace ne sont pas réalisées*. Les phénomènes que l’Inspection générale observe seraient alors tout à fait normalement, hélas, l’effet d’une demande qui ne peut pas aboutir à l’invention d'une technique efficace, une demande appelant un état que l’autorité peut toujours opposer aux réalisations maladroites des professeurs et qui fonctionne donc comme un discours moral inquisitoire.

Pour instruire le débat, je me propose d’abord de tenter avec vous de retrouver, dans les textes officiels comme dans les travaux de recherche, les traces des débats scientifiques, des positions parfois contradictoires des chercheurs et celles des institutions qui gouvernent le système d’enseignement, sur la question des problèmes et des fonctions didactiques qui leur sont attribuées. Elles sont, en effet, multiples. Puis, je tenterai de montrer les conditions qui risquent d’avoir pavé de bonnes intentions un chemin qui se retrouve, trop souvent, conduire tout droit les professeurs et leurs élèves à l’enfer de l’activisme.
On remarquera d'abord que très souvent, le mot d’ordre ne parle pas *d’apprendre* les mathématiques mais *d’en faire*, et que, dans le cas du CE2 où il s’agit bien de *faire des mathématiques pour en apprendre*, le texte ne pose pas la question de savoir si « en faire » suffit pour « en apprendre », comme si tous les professeurs savaient se débrouiller de cette injonction.
Prenons le texte le plus explicite, celui pour le collège. Les élèves, en effet, sont supposés avoir un rapport mieux qualifié et plus scolaire aux autres objets de la liste qu’ils « rencontrent » (les modèles des situations), comprennent (le sens du calcul algébrique), découvrent (les propriétés universelles des figures) ou dont ils « font l’apprentissage (la

démonstration) ». Au point que l'on pourrait se demander s'il faut apprendre quelque chose des problèmes que l'on résout ou s'il faut seulement « en avoir fait » et s'en souvenir pour en faire, à la demande.

> *« Résoudre des problèmes » deviendra bientôt, chez certains auteurs, une compétence, sans plus aucun contenu mathématique déclaré.*

Ainsi, apprendre des mathématiques ne serait plus l'enjeu de l'enseignement des mathématiques : après tout, on n'enseigne plus le latin pour que les élèves sachent écrire ou parler cette langue, les mathématiques pourraient devenir elles aussi une *pratique culturelle morte*.
Cette position est défendue par certains courants cognitivistes, au Québec, en Suisse et en Belgique et elle sera bientôt, peut être, vivace en France. Actuellement, sans doute, la lecture des programmes montre que, si certains mathématiciens rejoignent ce courant de pensée et affirment que, pour faire des mathématiques, il n'y a rien à savoir, sauf à être mathématicien professionnel, ce qui est fort rare, ce n'est pas la position officielle de l'enseignement. Pourtant, la dernière description du socle commun parle bien de... compétences, utilisant très précisément le terme qui est porteur potentiel de cette position.

Revenons donc au texte pour le CE2, le texte de 2002 qui définit les contenus de l'enseignement semble décrire très fermement le processus attendu. Un processus qui s'engage par « la recherche de réponses efficaces à des problèmes » et « débouche sur une nouvelle connaissance (notion ou procédure) » et le texte précise même que :

> *« L'entraînement, nécessaire pour fixer certains savoir-faire essentiels et les rendre plus facilement disponibles, ne doit pas occulter la phase, parfois longue, au cours de laquelle les connaissances sont élaborées par les élèves, puis progressivement précisées et structurées. »*

ce qui est une position forte et raisonnable.

Faire de vraies mathématiques ?

En ce point du débat, il est essentiel de noter que les premiers à avoir traité de la question n'ont pas porté le mot d'ordre lui-même. Ainsi, rejoignant sur ce point ce que défend déjà Douady (1986) à qui il réfère, Chevallard, (1981, p 28) :

> *« ...les mathématiques sont moins un ensemble de connaissances (à acquérir) ou un corpus d'énoncés (à apprendre) qu'une activité spécifique dont les éléments essentiels sont des* problèmes *que l'on s'essaie à résoudre et qui sont en quelque sorte le moteur de l'activité mathématique, et des* outils *(concepts, méthodes, techniques) dont la construction elle-même est un problème mathématique et qui seront mis en fonctionnement pour résoudre des problèmes. »*

Faire des mathématiques, c'est ***utiliser*** des outils pour résoudre des problèmes et donc aussi, ***construire*** des outils permettant de résoudre des problèmes ou encore, ***étudier*** des outils et les problèmes qu'ils permettraient de résoudre. Résoudre des problèmes est le moteur et le motif de l'activité mathématique, ce n'est pas rien mais ce n'en est pas le tout, le texte des programmes dit aussi cela, Chevallard (1991) y insiste et développe même une théorie des outils mathématiques Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999) qui dialogue avec de nombreux travaux français et internationaux : Bartolini-Bussi, M.-G. & Boni, F. (2003), Péres, J. (1984), Radford, L. (2005), Reuter, Y. (2006).

En revanche, l’équipe premier degré de l’INRP (ERMEL, 1993) retrace aussi et parallèlement l’histoire d'un tout autre objet, les « problèmes pour apprendre à chercher » dans l’enseignement et montre qu'en 1945, les problèmes sont classés par le nombre d'opérations que leur résolution mobilise, en 1970, ils doivent permettre aux élèves d’apprendre à « analyser une situation ou une chaîne de situations élémentaires, les schématiser afin de mettre en évidence les relations mathématiques qui les décrivent », et que la notion de « situations-problèmes, beaucoup plus ouvertes, élaborées par l’enseignant ou par les élèves, à propos desquelles la recherche peut s'exercer dans de multiples directions... » n’intervient qu’en 1978-80. ERMEL fait explicitement référence à la psychologie cognitive et cite Brun (1990) pour différencier un exercice, un problème pour apprendre et un « véritable » problème, « pour lequel l’élève ne dispose pas d'un modèle de résolution qui lui ait été enseigné » : c’est-à-dire, un problème pour *apprendre à chercher* et non pas un problème permettant d’apprendre les mathématiques avec lesquelles on résout les problèmes du même type.
On remarquera ensuite que les tenants du mot d’ordre peuvent facilement être reconnus à cela : le mot d'ordre suppose que là-seulement, dans la recherche à laquelle engagent les situations qui posent problème est *l’activité vraie*, qui permet de faire *vraiment* des mathématiques, bien sûr, et d’en éprouver la vraie nature : le mot d'ordre l’affirme, la vraie nature de l’activité mathématique c'est... de chercher à résoudre des problèmes. Le débat n'a pas plus de fin que les débats métaphysiques. D’ailleurs, la dernière livraison de l’INRP s’intitulait « Faire des maths en classe ? » avec un point d’interrogation rendant compte du fait que certains se demandent si c’est possible et que deux au moins des IREM impliqués ont interprété la question sous cette forme : « Qu’est-ce que faire *véritablement* des mathématiques (en classe ou, en situation scolaire) ? » Le paradoxe est que, alors qu’ils affirment tenir pour la discipline plus que quiconque, toutes ces déclarations et les travaux correspondants laissent de la place aux tenants de l’enseignement par « *véritables* situations-problèmes » proposant « de véritables problèmes pour de véritables recherches » sans considération pour l’organisation des contenus d'apprentissage en organisations disciplinaires de savoirs**,** puisque l’enjeu est que les élèves *se* construisent *leurs* propres savoirs, relatifs à un obstacle issu de leurs conceptions initiales personnelles.
Ce qui, n’en déplaise aux bonnes intentions des auteurs, conduit à oublier que les savoirs sont des objets sociaux, des connaissances publiques et partagées construites par les hommes comme des outils pour penser et agir de manière normalisée afin d'obtenir des résultats socialement garantis, démontrés en principe et dont il est possible de rendre compte (Sensevy, G. & Mercier, A., 2007).

Etude d'un problème typique, les patrons du cube

C’est apparemment un problème de géométrie : « *Combien y a-t-il de patrons du cube ?* »
Souvent, le problème est posé sous une forme voisine : « *Voici un patron du cube, trouve tous ceux que tu peux!* » Les deux formes méritent analyse. D’abord, parce que ce problème a bien une réponse et une seule (il y a 11 patrons distincts), mais que personne ne sait comment garantir qu’il la possède en démontrant qu’il a formé TOUS les patrons de cube possibles : il faudrait pour cela savoir comment on fabrique un patron de cube... Pourquoi alors demander aux élèves une recherche qui n'aura pas de fin prévisible ? La recherche de Tous les patrons est-elle vraiment hors de portée des élèves de CM et de leurs professeurs ?
Pour répondre, nous devons faire quelque chose qui appartient au programme explicite du collège, produire une description du cube. Mais nous devons chercher une description mathématique c’est-à-dire qu'elle doit permettre de *contrôler la fabrication des patrons de cube,* soit pour les produire systématiquement soit *pour* en contrôler la fabrication, et ainsi *les compter*.

Il faut pour cela dénombrer d'abord les éléments constitutifs d'un cube ou plus généralement d'un parallélépipède : faces, sommets, arêtes, tous éléments impliqués dans la fabrication des *patrons de polyèdres.* La description cherchée doit avoir les propriétés attribuées aux nombres par Lebesgue, elle doit être complète, car, c'est un résultat des travaux de Guy Brousseau et de ses étudiants (Briand, Loubet, Salin, 2004) à l'École Michelet (école expérimentale de Bordeaux-Talence, 1972-1999).

> *On ne peut dénombrer que des* ensembles *que l'on sait énumérer et pour cela organiser en* listes : *ce que nous nommerons des* collections.

Il en faut donc une description qui ait les propriétés attribuées aux nombres par Lebesgue, et la meilleure description commence par les faces, comme chacun le sait dans la vie courante. Une face avant, une face arrière, une face droite et une gauche, un dessus et un dessous. Six faces organisées en trois paires de faces parallèles, donc, que l'on peut colorier de trois couleurs : Noir (on note 0,1 et 0,0 les deux faces noires), Rouge (1,1 et 1,0) et Bleu (2,1 et 2,0). Le premier nombre code la couleur, le second la face. Alors, deux faces parallèles étant de même couleur, une arête est l'intersection de deux faces de deux couleurs différentes (comme 0,1;1,1) et un sommet, l'intersection de trois faces de trois couleurs différentes (0,1;1,1;2,0 par exemple) : *on peut donc former la liste des faces et la liste des sommets sans disposer d'une représentation graphique du cube, la question étant : « Notre description est-elle suffisante pour ce travail ? » sachant que si c'est le cas, nous avons une bonne description.*
Cette notation permet-elle d'énumérer et de dénombrer faces et sommets ? Oui, parce qu'elle est, pour cet usage, une description complète de tout parallélépipède. Une arête se code par les deux faces non parallèles dont elle est l'intersection. En procédant systématiquement, on constate qu'il y a quatre arêtes possibles avec chaque face (01,11), (01,12), (01,21), (01,22) avec la face (01) et que chaque arête est ainsi obtenue deux fois, ce qui donne, pour six faces, 6X4:2=12 arêtes. On constate aussi qu'il y a quatre sommets avec chaque face (01,11,21), (01,11,20), (01,10,21), (01,10,20) avec la face (01) et que chaque sommet sera compté trois fois ce qui donne 6X4:3=8 sommets. La notation est donc intéressante.
Permet-elle de fabriquer des patrons ? Oui, parce que l'on peut rapidement donner les règles de leur construction, qui sont la traduction de la description du cube que la coloration des faces permet : le cube est composé de trois paires de faces parallèles, coloriées de la même couleur. Ce qui se traduit par la description suivante :

> - 1) Les patrons (les cubes) comprennent six faces liées en un ensemble d'un seul tenant.
>
> - 2) Ils comprennent deux faces de chacune des trois couleurs (les cubes sont des parallélépipèdes, les faces de même couleur sont parallèles).
>
> - 3) Deux faces adjacentes par une arête ou un sommet sont de couleur différente (les faces parallèles n'ont aucun point commun, elles sont opposées).
>
> - 4) Trois faces de trois couleurs différentes ne sont pas alignées sur le patron (elles sont sécantes et définissent un sommet).

Aussi,

4)) Les patrons de cube comprennent six faces (identiques) liées en un ensemble d’un seul tenant.

5)) Sur les patrons de cube, les faces parallèles comme 2,0 et 2,1 sont de même couleur et n’ont aucun point commun puisqu’elles sont opposées.

6)) Sur les patrons de cube, trois faces de trois couleurs différentes {0,0;1,1;2,1} ne sont pas alignées sur le patron (elles sont nécessairement sécantes et elles définissent donc un sommet).

Nous avons trouvé de nombreux sites de classes et plusieurs sites mathématiques personnels qui traitent de ce classique. Même, une classe de CE2 a trouvé onze patrons, pour un travail de recherche d'un an... sans réussir ni à montrer qu’ils les avaient tous produits ni à installer une recherche systématique commode. Il semble que les deux techniques de travail d’une telle question soient inconnues des professeurs qui y engagent leurs élèves. Pourtant, le codage des arêtes sur chaque face d’un cube permet de fabriquer des patrons validés par la correspondance des numéros, ce qui est déjà une réponse à la situation qui utilise les nombres comme système de codage, un usage trop rare à l’école alors qu'il est devenu omniprésent dans la société. Et si on considère que la coloration des faces donne un autre codage, on obtient la description d’un patron comme arbre composé de six chiffres 1, 2, 3, disposés selon les quatre règles ci-dessus. Ce qui donne une systématique et donc, une énumération permettant le dénombrement :

Partons de 0, qui désigne une face de couleur 0.

Il est prolongé en 01.

```
Le 2 ne peut venir en ligne et deux prolongements sont donc possibles,   010 et  01
                                                                                  2


- 010 se prolonge de deux manières, en 0101 ou en  010,
                                                     2


- quant à   01 il se prolonge en 01   seulement...
             2                  20
```

Nous poursuivons donc à partir de ces trois germes de patrons

```
- 0101 ne peut se prolonger en ligne, il donne donc 0101,
                                                      2
                                                       2      2      2      2
              -- le second 2 prend une des places en haut,    0101 ou 0101 ou 0101 ou 0101
                                                       2       2       2       2
```

et nous avons les quatre premiers patrons.

```
- 010 se prolonge, selon  la place du 1, sur la première ou la seconde ligne,
   2                                  2     2
       -- soit en 0101  qui donne  0101 ou 0101, les autres choix donnant un patron déjà donné
                 2                 2       2
```

et donne deux patrons supplémentaires.

```
                                                       2        2        2
       -- soit en 010      --- avec le 2 en haut, les trois formes    010   ou  010  ou   010
                  21                                                    21       21       21


                           --- avec le 2 en seconde ligne,  la forme          010
                                                                               212
```

soit quatre patrons encore.

```
- 01  se prolonge          en 01       puis enfin en 01
  20                          20                     20
                               1                      12
```

qui est le onzième et dernier patron de cube, car les autres s'obtiennent en permutant les noms des faces.

Comme l’énumération a été systématique, elle fait la preuve de ce que tous les patrons du cube ont été produits.

On peut donc les compter sûrement. Mais on peut alors se demander pourquoi on limite la question au cube, alors que la poser à propos d’un parallélépipède rectangle permet de repérer les faces par leur forme (chaque paire de faces parallèles a une forme repérable), ce qui correspond au même codage que la couleur, ou de repérer la conformité des configurations par les arêtes (chaque quadruplet d’arêtes a une longueur caractéristique), ce qui correspond au premier codage évoqué. Mais je n'ai pas trouvé, même en sixième, de demande de compte de tous les patrons des parallélépipèdes conduisant à s’apercevoir qu’il y en a 11, *comme pour le cube*, parce que la forme des faces n'importe pas : ce savoir est sans doute celui du premier mathématicien qui a posé la question et qui pour cela n'a pas demandé d'autre compte, mais aujourd'hui, il n'appartient pas aux professeurs.

La propriété qui permet de compter les patrons du cube tient dans un savoir mathématique peu connu, parce qu'il a été nommé par un didacticien et non par un mathématicien (Briand, J., Loubet, M. et Salin, M.-H. 2004). Ce savoir est pourtant la clé de tous les problèmes de *dénombrement d'une collection*, c'est que *pour compter des objets il faut les organiser en collection* c'est-à-dire, les individualiser par *une procédure de désignation qui les ordonne* et que l'on nomme « une énumération ». Organiser, comme je viens de la faire, la manière de produire les patrons de cube pour les lister, c'est le seul moyen de les compter. Cela dit, il existe sans doute de meilleures manières d'organiser cette collection, c'est l'objet du travail des chercheurs en mathématiques que l'on nomme combinatoriciens.

> Mais les professeurs qui ne connaissent même pas une de ces manières sont incapables de diriger l'étude du problème c'est-à-dire, d'indiquer aux élèves une direction à suivre, d'évaluer les idées qu'ils proposent, de les enseigner.

Je ne dis pas là quelque chose d'étonnant puisque depuis maintenant plusieurs années, des chercheurs de tous pays et cultures ont montré que l'efficacité d'un corps d'enseignement tient à la maîtrise à la fois pratique et théorique des questions précises que les enseignants posent aux élèves (Liping Ma, 1999). Ainsi, la recherche des patrons du cube peut être *instructive*, si les professeurs connaissent au moins une manière de la réaliser et s'ils savent à quel corps de mathématiques elle appartient. Sinon, ce qu'un élève apprendra en s'y engageant tiendra de ses contingences personnelles : il n'y a peut-être pas de pratique enseignante plus discriminatoire.

Partie 3 : Faire des mathématiques en classe, pour en apprendre

Une technologie du possible

L'exemple que j'ai développé ici n'est pas isolé, il ne tient pas à tel ou tel professeur qui aurait été mal formé. Il met en cause tout le système d'enseignement qui demande que la question des patrons du cube soit posée comme « problème ouvert » ou « problème pour chercher », alors qu'il n'y a, en le cherchant, rien à trouver que le système d'enseignement ait identifié. Pire, il semble bien que ce soit, pour beaucoup, le critère du fait que l'on tient là un véritable problème pour chercher. Je ne donnerai pas les exemples venus d'une classe, il est trop désolant de voir des enseignants ne pas savoir quoi faire des instructions qui leur sont données et des élèves perdre leur temps. D'autant que, dès le début, les didacticiens qui posaient « le problème (didactique) des problèmes (pour enseigner) » mettaient en garde contre le fait que rendre ainsi à l'élève sa place est le fait d'une ambition sans moyens. Je citerai le même texte de Chevallard, page 29 et suivante :

> « En pratique, je ne vois pas qu'on ait fait autre chose, à ce jour, que de mettre à la disposition des enseignants, pour tout viatique, des « activités » ou des séquences d'activités (c'est le cas aussi bien dans les IREM qu'à l'APM) .../... c'est une attitude cohérente avec le principe de compétence de l'enseignant ! Qu'on lui dise ce qu'il doit faire .../... et lui saura agir, sa compétence fera le reste – puisqu'il est enseignant. Pourvu qu'il veuille bien se conformer à ce qu'il lui est demandé de faire ! .../... Malheureusement, nous savons tous ce qui va arriver

> .../... c’est à peu près ceci : dans une majorité de cas, même s’il a entendu, et reçu parfois avec enthousiasme, l’appel à donner plus de place aux activités dans la classe, à plus ou moins brève échéance .../... elles deviendra un extra ; mais surtout la signification qu’on leur attribue sera dénaturée.../... paradoxalement, le respect de la signification et de la place donnée à l’activité des élèves sera d’'autant mieux sauvegardé qu’'on travaillera avec des classes plus « faibles » ; .../... parce que là on demande d’occuper les élèves, tout en leur apprenant un peu si c’est possible.../... Le problème qu’il nous faut examiner nous est posé par ce clivage entre notre volonté, tendue vers un but clairement désigné, et notre connaissance pratique des choses.../... Nous nous faisons les hérauts de ce qui doit être en oubliant ce qui peut être.../... Le problème tel que nous le posions concernait l’élève, c’est sur l’enseignant qu’on bute maintenant..../... C’est l’illusion volontariste dont la forme collective est le juridisme.../... qui nous conduit à verser dans le moralisme : nous construisons des machines que nous appelons volantes et nous voudrions que par cela seul elles volent. »

Nous avons besoin d’une technologie du possible. Nous avons besoin d’apprendre à poser des problèmes qui permettent d’enseigner, et d’apprendre à enseigner à partir des connaissances produites par des élèves qui ont cherché à résoudre des problèmes, ce qui suppose des problèmes d’un type particulier que l’on nomme « des situations didactiques ». Il nous faudra renoncer à enseigner en fondant notre enseignement sur l’étude de problèmes si nous ne nous occupons pas à ce que le temps des activités proposées à l’élève soit un élément constitutif et nécessaire de la progression du cours de mathématiques. L’activité de l’élève ne peut pas être un enjeu en soi ; elle doit être un enjeu pour l’enseignement ou elle constitue un temps perdu. Cela, nous le savons en didactique depuis 1981 et c'est toujours dans le texte de Chevallard que je cite depuis le début de mon exposé, page 118-119 cette fois. *Seulement, c’est une rupture profonde avec le fonctionnement ancien et on ne peut l’obtenir par une évolution progressive*. Prenons le cas des exercices, qui sont dans la forme d’enseignement classique le lieu de l’activité des élèves. Le professeur ne fait pas dépendre son cours de la progression des élèves dans la résolution des exercices et même, il serait tout à fait inconvenant qu’il fasse démontrer aux élèves, en exercice, les théorèmes d’un cours qui consisterait à entériner et organiser les résultats obtenus par les élèves. C’est pourtant ce à quoi des activités efficaces devraient conduire : *la progression devrait être le résultat du travail des élèves, l’enseignant authentifiant culturellement le savoir produit, dont il a par ailleurs organisé la production*. C’est mieux en théorie, mais le passage pratique d’un fonctionnement à l’autre, dans lequel nous nous sommes engagés voici bientôt une génération, est problématique et suppose des inventions techniques qui ne viendront que si nous décidons collectivement qu’il y a un problème posé au système d’enseignement entier et non pas seulement l’effet de la mauvaise volonté des professeurs ou de leurs élèves.

Quels problèmes, pour enseigner ?

C’est le travail des mathématiciens et c’est pour cela que l’on a fait de ce constat une exigence pour l’enseignement des mathématiques. Pour cela, il faut que les mathématiciens :

- produisent les moyens de résoudre des types de problèmes les plus vastes possible ;
- organisent les problèmes en types de problèmes que l’on sait résoudre pour
  identifier ce que l’on sait,
  reconnaître ce que l’on sait faire,
  et poser à tous les problèmes qui demeurent.

La question qu'il faut poser à propos d'un problème pour l'enseignement est donc double :

1) Quels sont les problèmes voisins de ce problème, quel est son genre ?
2) Quel est l'avenir de ce que sa résolution permet d'apprendre ?

Pour imaginer ce que cela suppose, avec un problème tel qu'on en rencontre dans les classes et en considérant qu'une classe soit organisée en organisme de production mathématique, prenons un premier exemple (le faire avec une feuille, pour expérimenter la question) :

> *« On plie une feuille de papier une fois, le pli la partage en deux morceaux. On plie de nouveau, on obtient trois plis qui partagent la feuille en quatre morceaux. Combien de morceaux obtient-on si on plie la feuille une troisième fois ? »*

Cela ne semble pas encore un problème quoique, si vous n'avez pas de feuille à votre disposition pour faire l'épreuve, l'argument qui prouve le résultat n'est pas si simple. C'est que le problème n'advient que si la question posée devient plus générale. « On plie dix fois de suite sur elle-même, combien de morceaux obtient-on ? » est donc peut-être déjà une manière de « faire problème ». Mais ce n'est le cas que si l'on renonce à chercher cette réponse pour chercher comment répondre pour tout autre nombre de plis. Ce problème se rencontre dans les ouvrages d'enseignement. Comment se résout-il ? À quoi cela sert-il de le résoudre ? Le poser permet de répondre à quel enjeu d'enseignement ? Le résoudre, est-ce faire des mathématiques ?
La réponse, on le comprend, ne dépend pas du problème lui-même, mais des conditions dans lesquelles il est posé, que l'on décrit comme une situation : c'est sans doute pour cela que le problème figure même deux fois dans les moyens d'enseignement suisses, en troisième année et en sixième année. Confondre les deux interdit de poser les questions essentielles ci-dessus.

Pour montrer l'intérêt des deux premières questions (comment se résout-il et à quoi cela sert-il de le résoudre ?), voici un problème proche :

> *« On trace, sur une feuille de papier rectangulaire, un trait parallèle à un bord, qui la partage en deux puis, un trait perpendiculaire (parallèle au bord suivant) qui partage en deux chacun des morceaux obtenus. On obtient quatre morceaux. Combien de morceaux obtient-on si on partage en trois dans un sens et en deux dans l'autre ? »*

Cela est encore un problème de dénombrement à traiter directement mais si la question devient plus difficile... « On partage un rectangle en dix-huit dans un sens et en trente quatre dans l'autre, combien de morceaux élémentaires obtient-on ? » le problème peut commencer à advenir comme type de question de dénombrement si vous savez, par exemple, les réponses pour des rectangles plus petits, de huit sur vingt, dix sur quatorze, etc. : vous chercherez en effet à former une réponse à partir des problèmes précédents que vous avez résolus, reconnaissant par là que le problème appartient à la même catégorie, qui n'est pas celle du problème qu'ouvre la question : « Combien de rectangles a-t-on tracés ? »

Et puis, pour mieux comprendre comment les conditions ordinaires d'une institution scolaire limitent l'envergure des questions mises à l'étude, posons le problème plus général suivant :

> *« Multiplier, par le procédé de votre choix, le nombre de 23 chiffres suivant 39587100985672987193375 par le nombre de 33 chiffres que voici 765584937728347927911205474638992, en vous donnant les moyens de garantir votre résultat »*

Il appartient à la même classe que le précédent et sa résolution est grandement aidée par cette indication : dans ce cas, non seulement le savoir « multiplier deux nombres » est le résultat de l'étude du problème du rectangle, mais les connaissances venues de l'expérience de la recherche que ce problème provoque sont utiles dans le cas où l'algorithme socialement connu s'avère insuffisant.

Et pour bien me faire comprendre, voici deux problèmes proposés comme « problèmes ouverts » par des membres de l'IREM de Lyon. Ces problèmes permettraient de « Chercher, Essayer, Conjecturer, Découvrir, Prouver » et on trouve toujours, à Lyon, une équipe travaillant sur les « problèmes ouverts » :

> *Problème 1) « On donne un rectangle de dimensions n et p tracé sur un quadrillage unité. Combien de carrés unité traverse la diagonale du rectangle ? (exemple dessiné, rectangle 10x4) »*
>
> *Problème 2) « Étant donnés trois nombres positifs a, b, et c, est-il toujours possible de construire un triangle dont les côtés ont pour mesure ces trois nombres ? Si ce n'est pas toujours possible, quelles conditions doivent vérifier ces nombres pour que ce soit possible ? »*

Comment se résolvent-ils ? À quoi cela sert-il de les résoudre ? Les poser permet de répondre à quels enjeux d'enseignement ? Les résoudre, est-ce faire des mathématiques ?

Dans le cas du rectangle découpé en rectangles élémentaires, vous savez les réponses possibles : c'est un problème de multiplication, le résoudre sert à apprendre à faire toutes les multiplications usuelles, en apprenant *comment le décomposer en produits partiels* dont on fait la somme, mais aussi à identifier les questions de dénombrement de collections disposées en rectangles comme des questions de multiplication et à *répondre par une multiplication* au problème « Paul a trente quatre chemises et dix-huit cravates, de combien de manières différentes peut-il les coordonner? » dès que vous aurez eu l'idée d'organiser chemises et cravates en *un tableau rectangulaire de trente quatre sur dix-huit* dit « tableau cartésien ». Mais le problème ne répond pas tel quel à ces enjeux : il faut encore que le professeur enseigne, c'est-à-dire, qu'il désigne aux élèves le type de problèmes associés, en le préparant par les problèmes élémentaires relatifs, par exemple, ici à huit sur vingt et dix sur quatorze qui eux-mêmes... et qu'il poursuive l'enseignement en le faisant suivre d'autres problèmes permettant aux élèves d'explorer et d'étudier l'algorithme de la multiplication. Cela suppose aussi que la catégorie « problèmes de multiplication » soit identifiée et que son exploration systématique ait été explicitement mise au programme de travail des élèves (enfin, on peut leur demander de produire eux-mêmes et d'apporter des problèmes de multiplication des types les plus divers). Les travaux, sur ce point, sont nombreux, publics, et connus.

Conclusion : problème n'est pas situation

Pour apprendre, il faut le plus souvent être enseigné : seuls les mathématiciens professionnels ont pour métier d'apprendre les mathématiques par eux-mêmes.

Étudions le cas du problème de pliage. On remarquera d'abord que le problème n'a d'intérêt que parce qu'il ne se résout pas directement en effectuant le pliage. Il est en effet impossible de plier dix fois sur elle même une feuille de papier A4. Répondre suppose donc de changer de cadre et de *passer de l'expérience matérielle à une expérience numérique, par exemple en fabriquant un tableau des réponses connues permettant de voir que « le nombre de morceaux double à chaque pli nouveau* » la réponse est donc 1x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2=1024 (vous remarquerez que 1024 feuilles de papier, c'est environ deux ramettes et que le dernier pli serait donc obtenu en pliant une ramette en deux! La feuille de papier permettant cette opération aurait donc au moins mille fois 29,7 centimètres de long soit 297 mètres.) Pour que les élèves résolvent cette question, il faut comme toujours que le professeur enseigne, c'est-à-dire par exemple, qu'il organise le passage du problème initial à un problème numérique, en proposant un modèle pour son traitement. Il va donc devoir organiser la mise en commun des résultats obtenus par différentes équipes, jusque-là concurrentes dans la première exploration et qui se sont arrêtées selon le cas à cinq, six ou sept pliages, sachant que personne ne compte 64 objets sans erreur (six pliages), encore moins 128 (sept pliages). Il écrira lui-même les résultats de chaque équipe au tableau, en prenant soin de les présenter en deux colonnes. Et puis il demandera aux élèves de travailler sur ces tableaux de nombres et non plus sur les pliages matériels. Ce changement de cadre se comprend comme passage du système étudié à son modèle, ou encore comme passage de l'expérience à son compte-rendu, comme le dit Lebesgue. C'est ce que l'on appelle un geste d'enseignement, sa nécessité a été identifiée depuis plus de trente ans par les didacticiens (passage de l'action à la formulation, dans la Théorie des Situations Didactiques). Mais, pour en imaginer la nécessité, il faut comprendre comment les mathématiciens inventent des mathématiques, il ne suffit pas de savoir résoudre soi-même le problème. D'autant que le travail du professeur ne s'arrête pas là, puisqu'il doit assurer les liaisons entre ce que ce travail permet d'apprendre, en rapport à ce que l'activité d'hier a permis de savoir et ce que l'activité de demain enseignera à la classe.

C'est pourquoi le professeur devrait être en droit de demander quel est l'intérêt de poser ce problème aux élèves si, comme dans le cas où il est posé en CE2, on ne cherche pas le *type de question de dénombrement* auquel le problème appartient, pour voir, par exemple, qu'il relève d'une multiplication répétée ou exponentiation. Imaginons qu'on ne le cherche ni pour apprendre que c'est un problème d'exponentiation ni pour apprendre à calculer les exponentielles comme multiplications répétées et par exemple, s'apercevoir que l'opération n'est pas commutative.

Et si le professeur ne peut répondre à ces questions, les élèves doivent-ils donc apprendre de leur expérience de ce problème que « pour résoudre certains problèmes, il faut changer de cadre et passer de l'expérimentation au travail sur un système symbolique qui modélise les opérations matérielles (c'est-à-dire, qu'il faut se comporter en mathématicien) ? » Si c'est le cas, il faut le déclarer par les mêmes techniques d'enseignement que dans le cas précédent de la multiplication, et enseigner, par exemple, l'usage des tableaux de nombres comme moyen de traiter de questions autrement inaccessibles. Il y a donc là des questions redoutables auxquelles les professeurs sont affrontés, dont on peut imaginer la difficulté lorsque l'on s'aperçoit qu'on ne peut pas employer indifféremment les mots « partage » et « répartition » pour introduire le travail sur un problème du type division au CP, parce que ces termes engagent des stratégies d'action différentes. Il faut le savoir pour cerner correctement les stratégies de répartition engagées par les élèves. Or, il faut les identifier et les décrire correctement, pour savoir quoi en faire. Pour apprendre, il faut donc être enseigné : mais pour enseigner, un professeur doit être capable d'identifier la part d'apprentissage nécessaire qui se manifeste à travers les pratiques de ses élèves.

Pour aller plus loin

Les savoirs ne sont pas tous de même nature et on peut les distinguer selon le travail de leur production. Ce qui fait qu'on ne peut pas imaginer enseigner de la même manière deux savoirs de natures différentes et qu'il devient nécessaire d'inventer des manières d'enseigner pouvant garantir certaines propriétés des savoirs dont on vise la transmission.

À la suite des travaux de Brousseau (1998), nous pouvons dire que les savoirs s'organisent en plusieurs types, et qu'ils sont constitués :

de *théories* ou discours sur le monde de l'expérience,
d'*algorithmes* ou règles d'action dans le monde de l'expérience,
de *routines* ou manières d'agir dans le monde de l'expérience,
d'*expérience* ou connaissances dans le monde de l'expérience.

Chaque type est produit à partir d'un type précédent : la problématisation des *faits* d'expérience produit, par mathématisation, des *résultats* qui se décrivent dans des organisations théoriques, les résultats sont *démontrés* en théorie (sous la condition de vérité des axiomes et des théorèmes précédemment connus); l'usage systématique des *résultats* théoriques produit, par démathématisation, des *outils* qui se décrivent comme algorithmes, les outils sont *vérifiés* par ce qu'ils réalisent en pratique (sous les conditions données par la théorie); l'emploi usuel des *outils* algorithmiques produit, par désinstitutionnalisation, des *dispositifs* qui appellent des routines ou pratiques, les dispositifs sont *validés* par ce qu'ils permettent de faire (dans des conditions pratiques diverses, sous le contrôle de la contingence); la mise en œuvre des *dispositifs* produit, par réinstitutionnalisation, des *faits* qui sont issus de l'expérience, et des connaissances, les faits sont *prouvés* expérimentalement (dans le domaine de réalité dont une institution donnée traite).
Tout enseignement réalise un équilibre dans cet espace. Mais, enseigner des problèmes, des théories, des algorithmes, ou des routines ne se fait pas de la même manière. C'est sans doute cette nécessaire variabilité de l'enseignement attendu qui fait le principal problème *professionnel des professeurs de mathématiques*. On peut, bien sûr, essayer d''enseigner des théories sans les problèmes qui les motivent, des algorithmes qui ne sont pas les résultats de l'usage de théories, etc., mais...
• ce n'est pas très motivant, pour le professeur comme pour les élèves, puisque le savoir enseigné n'a pas de motif ;
• c'est coûteux en efforts parce que la composition des gestes élémentaires (dont l'exécution n'est pas sous le contrôle d'une évaluation (théorique, démonstration des résultats, algorithmique, vérification des outils, routinière, validation des dispositifs, ou d'expérience, preuve des faits) appartenant à l'agent, augmente rapidement la complexité de l'action ;
• c'est donc long et pénible pour les élèves, qui ne peuvent pas contrôler leur action et corriger leurs erreurs (Brousseau l'avait déjà dit en, 1973, à propos de la multiplication).
Il faudrait donc enseigner des savoirs qui tiennent solidairement à ces quatre dimensions (routines, expérience, théories, algorithmes); et on peut montrer, en effet, que tout enseignement stable propose un parcours organisé d'une telle organisation mathématique, l'enjeu de l'enseignement et la culture des élèves déterminant les points de départ et d'arrivée du parcours. Mais nous savons que la difficulté d'un enseignement organisant l'ensemble du parcours n'est pas seulement épistémologique, elle tient aussi à la nécessité de *changer d'activité de référence* chaque fois que l'on change de niveau dans le parcours. C'est ce que déclare par exemple la Théorie des Situations Didactiques (TSD), qui propose trois étapes, pour passer du niveau de l'*action dans un milieu* à la *production de représentations* puis, à la *validation des résultats* obtenus, pour produire des éléments de théorie relatifs à l'action. Mais bien d'autres mouvements sont nécessaires, qui nécessitent peut-être des étapes que la TSD ne nomme pas. Le travail épistémologique à l'usage de l'enseignement n'est pas terminé.

Dans le cas des travaux conduits aujourd'hui à l'INRP en coopération avec la CII Didactique, qui mobilise dans un travail commun des enseignants-chercheurs, des formateurs d'IUFM et des professeurs dans une dizaine d'IREM, le travail est conduit par les didacticiens à la fois avec les professeurs et les formateurs. Le problème est donc pris par un autre bout, supposant en quelque sorte que le travail mathématique permettra aux professeurs de transformer les organisations pédagogiques (Fluckiger & Mercier 2002, Matheron & Salin 2002) parce que nous faisons cette hypothèse : *les professeurs ont plus de liberté de décision d'organisation du travail de leur classe, sont plus disponibles à l'observation de leurs élèves, sont plus ouverts à leurs idées, s'ils sont assurés des savoirs qu'ils cherchent à transmettre*. Notre question commune pourrait donc être formulée ainsi : Dans le format d'enseignement devenu classique aujourd'hui : [activité/synthèse/exercices/évaluation] mais qui, de fait, est fortement instable, quel est l'avenir d'une activité proposée aux élèves en introduction d'une leçon ? Fera-t-elle expérience, produira-t-elle des faits ? Quels résultats sont attendus de la synthèse qui rend compte de son étude, dans quel cadre théorique seront-ils inscrits ? Comment le professeur peut-il gérer cet avenir ?

D'un problème à une situation didactique

Pour commencer de répondre, une première question est utile : Sur quoi l'activité proposée ouvre-t-elle ? Sur quoi devrait-elle ouvrir ? Un problème ? Ou... une situation ? Les débats entre nous n'ont pas décidé; cependant, nous avons quelques éléments permettant d'avancer, ils tiennent à l'analyse des thèmes et des valeurs portés par un projet de leçon.

> Quel est l'enjeu actuel de *l'activité*, est-elle robuste ?
> Quels sont ses avenirs possibles ?
>
> Plus précisément,
> Ouvre-t-elle sur une question *cruciale* ?
> Ouvre-t-elle sur un thème d'étude dont elle est *génératrice* ?
> Ouvre-t-elle sur une théorie dont elle est *fondamentale* ?
> Permet-elle un ou plusieurs *parcours* dans une organisation de savoirs ?

Nous avons engagé des travaux qui permettent de répondre positivement à ces questions, comme, par exemple, ceux de l'équipe de Bordeaux, qui prend l'idée de Lebesgue au sérieux et développe le *calcul de l'aire du rectangle* comme situation fondamentale des calculs de produits, de nombres entiers dans l'enseignement élémentaire, de fractions et de décimaux ensuite. Ce travail conduit chaque fois à des éléments théoriques, puis à la construction d'un algorithme et, enfin, à la mise en place d'un dispositif permettant d'asseoir des routines de calcul sur un répertoire connu.

Notre travail de didacticiens consiste à identifier, avec les professeurs et à leur intention, des *outils* techniques, qui ne sont pas toujours décrits dans les travaux mathématiques théoriques mais qui permettent de gérer le curriculum réel que les professeurs mettent en place au quotidien et de même, à leur fournir des *résultats*, des *dispositifs*, des *faits*, pouvant donner des objets d'enseignement conformes aux programmes. C'est ainsi que nous proposons (dans le cadre d'un projet nomme AMPERES) de réaliser le travail de développement que demande l'INRP. Les outils sont peut-être les éléments les moins visibles. Ils sont identifiés par des systèmes sémiotiques, des *notations* « calculables » et les *notions* associées (tableau de nombres, colonne des différences; programmes de calcul écrits comme formules d'un tableur; etc.) dont la vie appartient parfois seulement à la culture d'un niveau d'études. Les résultats sont énoncés et lorsqu'ils sont de quelque ampleur on les nomme théorèmes, les dispositifs s'appuient sur leur usage et certains comme l'algorithme de multiplication sont suffisamment connus pour figurer au programme des études. Ces systèmes de notations et de notions *à* *usage didactique* sont indispensables au professeur comme aux élèves parce qu'ils correspondent à leur niveau de travail théorique. Mais si ces systèmes langagiers et symboliques, étroitement associés, ne sont pas stables et identifiés comme *les enjeux officiels du travail de la classe*, les activités des élèves et du professeur ne produisent pas de savoir mathématique visible et bientôt ces activités ne sont plus légitimes (Ma, 1999 ; Brousseau, 2004 ; Sensevy & Mercier, 2007). C'est, en ce sens, que notre travail de développement participe à la production d'un curriculum effectif : nous nous sommes donné pour enjeu de produire, systématiquement et en coopération, les supports de situations d'enseignement robustes.

Les contraintes sont multiples et l'enseignement est déterminé à plusieurs niveaux relatifs aux mathématiques d'un côté, aux professeurs et aux élèves de l'autre, ce qui interdit une intervention directe; des points d'appui d'une évolution possible peuvent pourtant être identifiés autour de l'observation des *erreurs persistantes des élèves ordinaires et des élèves en difficulté comme des besoins exprimés des professeurs.*

Nous savons d'expérience qu'il n'y a pas de mutualisation sans théorie commune, pas de ressources produites par les professeurs eux-mêmes en position de professeur, sinon pour eux-mêmes. Nous savons aussi que le système d'enseignement n'a pas produit les personnes dont ce serait le métier.

Car ce qu'il y a à concevoir ce sont des situations *au sens plein, c'est-à-dire, à la fois,* des contenus d'enseignement et les conditions de leur enseignement*. Mais le travail des professeurs pour conduire de tels enseignements décrits ainsi ne va pas de soi. L'étude des difficultés que les professeurs rencontrent alors est l'une des questions de travail des didacticiens des mathématiques* (Schubauer-Leoni, M.L. & Leutenegger, F., 1997 ; Assude et Mercier, 2007).

Mais pour conduire ce travail, nous disposons de peu de moyens humains et nous avançons dans un environnement instable où les injonctions venues du système de pilotage de l'enseignement sont parfois contradictoires, parce que la question : « Quels sont les savoirs à enseigner pour qu'ils forment le cadre de pensée de la génération à suivre ? » est toujours un enjeu politique fort, dans toute société. Or, les choix ne sont jamais complètement explicites et leur réalisation nécessite aujourd'hui une professionnalisation du métier de professeur dont la société ne semble pas avoir idée.

Le fond de la question pratique qui est posée ici, à savoir la difficulté du choix des problèmes, ne fait de doute pour personne. Il est nécessaire qu'à chaque étape d'évolution des techniques de travail mises en œuvre par les élèves, les professeurs puissent trouver les questions qui les déstabilisent, les menant ainsi à créer des techniques de résolution nouvelles et à les rendre collectives. Cependant, le fait que la plupart des professeurs n'y parvient pas, montre que les conditions d'existence d'un enseignement fondé sur des problèmes de recherche ne sont malheureusement pas réunies. Or, pour que chacun puisse acquérir les propriétés épistémologiques nécessaires à un enseignement et à un apprentissage de qualité, il faut, de façon inévitable, enseigner par problèmes. Cela signifie donc, compte-tenu des critiques qui peuvent être adressées au système actuel, qu'il faudrait changer beaucoup plus que la formation des professeurs. En particulier, on ne peut renvoyer aux seuls professeurs la responsabilité du choix des problèmes posés, sous peine de devoir finalement renoncer à cet enseignement.
On peut dire pour conclure que le simple fait de poser un problème est insuffisant pour prétendre enseigner. Mais, pour aller plus loin, nous devons savoir qu'il faut inventer des systèmes de représentations, de raisonnement et de langage adaptés à chacune des catégories de problèmes que nous mettons dans un plan d'études, si nous le souhaitons propice à un

enseignement efficace des mathématiques. Il nous incombe donc de faire évoluer les choses, collectivement.

<u>Références</u>

Allal, L. (2001). Situated cognition and learning : From conceptual frameworks to classroom investigations. *Revue suisse des sciences de l'éducation*, 23/3, 407-422.

Assude T. & Gispert, M. (2003). Les mathématiques et le recours à la pratique: une finalité ou une démarche d'enseignement!? *In* D. Denis et P. Kahn (dir) *L'école républicaine et la question des savoirs*. Paris : CNRS Editions.

Assude, T. & Mercier, A. (2007). L'action conjointe professeur – élèves dans un système didactique orienté vers les mathématiques. In G. Sensevy et A. Mercier (Eds.) *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. (pp. 153-185). Rennes : Presses universitaires.

Bagni, G. & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica : la prospettiva socio-culturale. *La Matematica e la sua didattica*, 1, 73-87.

Bartolini-Bussi, M.-G. & Boni, F. (2003). Instrument for semiotic mediation in primary school classrooms. *For the Learning of Mathematics*. 23, 2, 12-19.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques.* 19/1, 77- 123.

Brassac, C. (2007). Une vision praxéologique des architectures de connaissances dans les organisations. *Revue d'Anthropologie des Connaissances*, I, 121-135.

Briand, J., Loubet, M. & Salin, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelles* (CD-Rom). Paris : Hatier pédagogie.

Brossard, M. (2001). Situations et formes d'apprentissage. *Revue suisse des sciences de l'éducation*, 23/3, 423-438.

Brousseau, G. (1973). Peut-on améliorer le calcul des produits des nombres naturels ? *Cahier de l'enseignement élémentaire, 13*, 195-237.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31.

Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des Sciences de l'éducation*, vol XXX, no 3, 241-277.

Brun, (1990). La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives. Math-Ecole 141.

IREM de Lyon (1984). Enseigner par problèmes ouverts. Intervention au congrès de la CIEM à Berkeley, *Bulletin inter-IREM.*

Chevallard Y. (1981). *Pour la didactique*. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique de Grenoble*, Grenoble: LSD2-Imag, Université Joseph Fourier. 103-117.

Digneau, J.-M (1980). Création d'un code à l'école maternelle : étude d'un saut informationnel. Mémoire de DEA, IREM de Bordeaux.

Douglas, M. (1999). *Comment pensent les institutions.* La Découverte/M.A.U.S.S. Collection Recherches.

Durkheim, E. (190X). Pédagogie. *In* F. Buisson (dir), *Dictionnaire de pédagogie*.

ERMEL (1993), CE1. Apprentissages numériques. Paris: Hatier, p. 39-51.

Fluckiger A., Mercier A. (2002), Le rôle d'une mémoire didactique des élèves, sa gestion par le professeur. *Revue Française de Pédagogie, 141*, 27-35.

IGEN Durpaire, J.L. (2006). *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*. Rapport à Monsieur le ministre de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche. 78 pages.

Jendoubi, V. (1992/2003). *La boîte vidée. Une activité d'élaboration d'un code graphique*. Document du Secteur des mathématiques, DIP Genève.

Kieran, C., Forman, E., and Sfard, A., Eds. (2003). *Learning discourse: Bridging the individual and the social: discursive approaches to research in mathematics education.* Dodrecht, TheNetherlands: Kluwer Academic Press [also published as the special issue of *Educational Studies in Mathematics, 46(1-3)*].

Havelange, V., Lenay, C. & Stewart, J. (2002). Les représentations : mémoire externe et objets techniques. *Intellectica*, 1/35, 115-129.

Lebesgue H. (1935). *La mesure des grandeurs*. Paris : Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, réédition 1975.

Luria, A. R. (1929/1998). Contribution à l'étude de la genèse de l'écrit chez l'enfant. In M. Brossard & J. Fijalkow (Eds.) *Apprendre à l'école : perspectives piagétiennes et vygotskiennes*. (pp. 201-211). Bordeaux : Presses Universitaires de Bordeaux.

Ma, L., 1999. Knowing and teaching elementary mathematics. London : Lawrence Erlbaum Publishers

Matheron, Y. (2002). La gestion enseignante de la mémoire des élèves. *Recherches en Didactique des mathématiques*.

Matheron Y., Salin M.-H. (2002). Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans l'action enseignante. *Revue Française de Pédagogie, 141*, 57-66.

Matheron, Y. & Mercier, A. (2004). Les usages didactiques des outils sémiotiques du travail mathématique : étude de quelques effets mémoriels. *Revue des sciences de l'éducation*. XXX, 2, 355-377. www.erudit.org/revue/rse/2004/v30/n2/012673ar.html.

Péres, J. (1984). Utilisation d'une théorie des situations en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'une activité d'apprentissage scolaire : construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle.

Thèse de doctorat, Université de Bordeaux II.

Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*. Bologna : Pitagora Editrice. 2. 191-213.

Reuter, Y. (2006). À propos des usages de Goody en didactique. Éléments d'analyse et de discussion. *Pratiques*, 131/132, 131-154.

Schubauer-Leoni, M.L. & Leutenegger, F. (1997). L'enseignante constructrice et gestionnaire de la séquence. *In* Blanchard-Laville C. (Ed.) *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyses d'une séquence : « L'écriture des grands nombres »*. L'Harmattan. pp. 91-126

Schubauer-Leoni, M.L., Leutenegger, F., Ligozat, F. & Flückiger, A. (2007). Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves : les phénomènes didactiques qu'il peut/doit traiter. In G. Sensevy, G. & Mercier, A. (Eds.) (2007). *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes : Presses universitaires.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17/2. 167-181.

L’intuition en arithmétique et ses bases cérébrales

Stanislas Dehaene, professeur au Collège de France

Je vous remercie infiniment pour votre invitation. Je vais essayer de vous exposer, du point du vue d’un laboratoire de neurosciences cognitives, ce que nous commençons à savoir sur certains des concepts les plus basiques des mathématiques. Je vais, en particulier, essayer de réhabiliter le concept d’intuition. Je pense qu’il est extrêmement intéressant. Nous avons des intuitions. Nous pouvons maintenant donner un fondement cognitif à cette notion. Je voudrais vous montrer qu’avant même que vous ne leur enseigniez des concepts abstraits, les enfants ont une certaine intuition des mathématiques.

Je m’adresserai surtout au domaine des nombres. Sachez que des recherches similaires existent dans le domaine de la géométrie. Ces domaines ne s’imposent pas de l’extérieur au cerveau de l’enfant. Ils y ont très souvent des précurseurs qui permettent l’apprentissage. Je ne suis pas certain que cette approche soit directement pertinente concernant l’éducation. Nous en discuterons. Je pense cependant qu’il est important que les enseignants aient un bon modèle mental de ce qui se passe dans le cerveau de l’enfant. Ses concepts sont transformés par l’école, mais de quel point part-il ? Comment ces transformations se produisent-elles dans le cerveau ?

C’est ce que j’ai essayé d’expliquer dans le domaine de la lecture. Cela s’applique également au domaine de l’arithmétique. Le modèle implicite que beaucoup d’enseignants ont, ou avaient, d’une sorte d’ardoise vierge sur laquelle on imprimerait des connaissances nouvelles n’est pas du tout celui qui ressort des études cognitives actuelles. Il s’agit plutôt d’une forme de recyclage neuronal. Le cerveau de l’enfant dispose déjà d’une très riche représentation conceptuelle. L’intervention, notamment dans le domaine mathématique, consiste à construire à partir de ces représentations conceptuelles initiales des représentations plus abstraites et à introduire des symboles pour ces représentations conceptuelles non symboliques. Il s’agit là du passage du non symbolique au symbolique, moment crucial dans les vraies mathématiques. Des protomathématiques peuvent exister chez le tout petit enfant ou chez l’animal.

J’ai voulu rappeler avec cette image de la querelle entre algoristes et abacistes qu’il existe plusieurs manières de faire des mathématiques. Il est tout à fait possible de faire des calculs très élaborés avec un abaque, mais culturellement, nous avons remplacé ce système par celui des chiffres arabes, un peu plus efficace. Cela ne signifie pas que nous ne continuons pas à nous appuyer, au niveau des représentations mentales, même lorsque l’on fait des calculs avec des chiffres arabes, sur des représentations de quantités ou d’ensembles d’objets. Ce dialogue entre le symbolique et le non symbolique se réalise dans le cerveau.

Je voudrais commencer par vous donner des exemples de ce que j’appelle l’intuition arithmétique, et de la manière dont elle est capturée en laboratoire. Si je vous demande, dans le contexte d’une comparaison de nombres, quel est le plus grand entre 5 et 9, ou si je vous demande de faire un calcul approché du type « 1 + 3 est-il égal à 8 ? » ou « 21 + 16 = 97 ? », je pense que vous aurez conscience de la réponse extrêmement rapidement, sans savoir comment vous y avez eu accès, et sans avoir fait le calcul. Ces remarques sont particulièrement manifestes concernant le dernier exemple. Vous savez immédiatement – il vous semble en tout cas que cela a été immédiat – que la réponse n'est pas 97, car elle est trop grande. Vous aurez peut-être l'impression qu'elle est trop à droite, ou trop loin.

Je vous parlerai aujourd'hui de ce type d'intuitions spatiales, de quantités. Vous avez constaté qu'elles sont non apprises et non conscientes. Nous verrons comment il est possible de le formaliser en laboratoire. Elles sont également très efficaces, rapides, et nous n'avons pas accès à ce qui se passe dans notre cerveau lorsque nous effectuons ce type d'opérations. Il faut l'observer grâce à des méthodes expérimentales.

Le circuit cérébral associé à l'intuition numérique

Il existe un circuit cérébral, ou réseau de régions, associé à cette intuition numérique. Il commence à être relativement bien connu. Reprenons l'exemple de la comparaison de nombres. L'une des expériences que nous menons en laboratoire consiste à présenter des nombres sur un écran, et à demander pour chacun d'eux à une personne de juger s'ils sont plus petits ou plus grands qu'une référence. Cette tâche est sans doute la plus minimale qui fasse appel à l'intuition des grandeurs numériques. Le temps de réponse n'est pas constant, malgré l'impression d'une réponse immédiate. Il dépend de la distance entre les nombres à comparer. Plus les nombres sont distants, comme 99 par rapport à 65, plus la réponse est rapide. Inversement, si vous avez à comparer 66 à 65, la réponse est lente. De même pour 59. Pourtant le chiffre de gauche pourrait suffire, mais c'est le rapport des quantités qui compte dans ces opérations.

Ce jugement de rapport des quantités peut être mis directement en lien avec l'entrée en activité de réseaux dans le cerveau. Les régions activées se situent en arrière du cerveau, dans les régions pariétales gauche et droite. Le niveau d'entrée en action de ces régions se corrèle très étroitement avec le temps mis par les personnes pour calculer. Nous pensons donc que ces régions sont responsables du surcroît de temps de calcul lorsque les nombres sont proches.

En réalité, nous avons observé ces régions bilatérales du cortex pariétal à l'intérieur d'un réseau. Il ne s'agit pas là d'un modèle phrénologique, où une seule région prendrait en charge les mathématiques. Cela serait absurde. Une région ayant un petit morceau de savoir sur les quantités numériques interagit avec d'autres régions du cortex précentral. Il est intéressant de constater que les régions pariétales interviennent systématiquement lorsque des adultes sont engagés dans des tâches de calcul et de comparaisons impliquant le sens des nombres. L'activité de cette région est directement proportionnelle à la difficulté des opérations.

L'intuition des nombres peut être totalement inconsciente

Dans notre premier exemple, elle était partiellement non consciente. Vous aviez accès aux résultats, et vous aviez le sentiment d'avoir travaillé sur des problèmes, mais aucune introspection n'était possible sur les opérations particulières réalisées pour arriver aux résultats. On peut, en fait, montrer que ce travail peut être effectué de façon complètement subliminale. Il fait partie des opérations de base que nous déclenchons dès qu'un nombre se présente devant nous.

Dans une expérience menée il y a quelques années avec Lionel Naccache, nous avions flashé sur un écran d'ordinateur le mot « NEUF » pendant une durée extrêmement brève de 43 ms, ce qui représente à peu près la durée d'une image dans un film. Nous rentrons donc dans le domaine des images subliminales. Si vous précédez et faites suivre ce mot de chaînes de caractères sans signification, il devient totalement invisible. Il disparaît de notre conscience. Vous n'avez pas l'impression qu'un mot est apparu à l'écran. Nous avions ensuite présenté le chiffre neuf, perceptible parce qu'il restait à l'écran plus longtemps. Dans cette expérience, les sujets voyaient des lettres clignoter très vite, puis un chiffre.

La question était de savoir si la présentation subliminale du mot « NEUF » avait eu une influence sur le traitement ultérieur du même concept, 9. Pour le savoir, nous avons comparé des essais dans lesquels la même quantité était représentée avec des essais dans lesquels nous avions présenté une quantité différente. Nous avons donc remplacé le mot « NEUF » par le mot « SIX ». Les sujets ne voyaient aucune différence, mais leur temps de réponse était ralenti dans la situation où 9 était précédé de « SIX ». L'effet d'amorçage, de démarrage de l'opération de comparaison numérique est possible, même de façon non consciente. Nous avions changé de notation entre le mot amorce et le chiffre cible. Cela ne changeait rien concernant l'effet d'amorçage subliminal.

Cela signifie que des représentations abstraites des nombres sont contactées dans ce type de traitement subliminal. Le cerveau ne reste pas au niveau de la surface des choses, très différente entre les lettres et les chiffres, mais accède à des niveaux profonds de représentations, conceptuels car communs aux mots et aux chiffres. Ce type d'expériences, dont beaucoup ont été menées depuis, a confirmé une certaine profondeur du traitement subliminal. Le schéma d'un cerveau d'adulte entraîné aux symboles et l'accès des symboles vers les quantités peuvent être extrêmement automatiques. Même des opérations telles qu'une addition peuvent être réalisées de façon non consciente par le cerveau bien entraîné.

Cela joue un rôle dans le développement des intuitions de second niveau. Ces symboles sont culturels. Pour une personne qui n'aurait pas appris à lire ou qui ne connaîtrait pas les chiffres arabes, ils ne signifient absolument rien. Par l'automatisation de la conversion du symbole vers le sens, le cerveau a acquis cette capacité d'accès totalement non conscient à une forme d'intuition. Ce résultat de l'éducation est fondamental. Elle crée en effet des réflexes d'activation cérébrale dans lesquels des symboles *a priori* vides de sens acquièrent un sens extrêmement automatisé. Cela fait partie de ce que l'école doit obtenir, avec de bons lecteurs et des élèves bien entraînés à comprendre le sens des nombres.

Sur le plan cérébral, nous avons pu mettre en évidence que la région intrapariétale dont je vous parlais tout à l'heure montre cet effet d'accès inconscient à la quantité. L'activité est moindre pour les essais où nous avons présenté deux fois la même quantité que pour ceux où les quantités différaient. Deux quantités différentes demandent donc plus de travail, non pas à l'ensemble du cerveau, mais aux régions particulières qui s'intéressent au sens de la quantité.

Cette région cérébrale ne s'intéresse, en revanche, absolument pas à la notation particulière des nombres, si l'on compare ce qui se passe pour les nombres présentés avec la même notation avec ceux présentés avec une notation différente. Du point de vue de la recherche sur le cerveau, on distingue de façon très nette les régions s'intéressant à l'orthographe ou à la vision des objets de ces autres régions, plus profondes et plus conceptuelles, qui sont invariantes concernant la notation mais travaillent au niveau du concept.

Des compétences existant chez l'animal et le très jeune enfant

Voilà une image ancienne où Darwin est rapproché d'un primate. Le miroir montre qu'il existe peu de différences entre les deux. Les compétences arithmétiques dont les humains disposent sont également présentes chez l'animal et chez le très jeune enfant dans des formes primitives. Autrement dit, une filiation de nos compétences mathématiques existe dans l'Évolution. Nous n'avons pas ces compétences par hasard. Nous les avons acquises parce que les concepts fondamentaux sur lesquels elles s'appuient sont opérants dans le monde extérieur. Ce sont des concepts d'objets, de nombres, d'espace et de temps, fondamentaux pour la survie des organismes dans le monde extérieur. Ils concernent des propriétés basiques de notre environnement. Notre cerveau a évolué au cours de millions d'années dans un environnement structuré, à une échelle dans laquelle des objets se déplacent. Il en a extrait les paramètres fondamentaux et les représente dans ses circuits mêmes, probablement très précocement, quasiment dès la naissance chez le jeune enfant. Il s'agit d'une manière fondamentale de structurer le monde extérieur.

Les expériences dans ce domaine sont très nombreuses. J'ai pensé qu'il serait préférable de vous en montrer des illustrations amusantes. Les expériences sérieuses, après des tentatives précoces entachées d'erreurs, ont commencé avec Otto Köhler qui a entraîné divers animaux à travailler avec les nombres. Vous voyez ici l'un de ses films, dans lequel on voit une perruche regarder un ensemble de sept points. Elle choisit ensuite parmi plusieurs ensembles celui qui en a également exactement sept, et sous lequel est cachée une récompense. Köhler a montré qu'il était possible d'obtenir ces performances tout à fait remarquables chez les animaux, y compris chez les oiseaux, dans l'appareillement des nombres. La perruche est même meilleure que nous, mais elle a de l'entraînement !

Mon deuxième exemple est une expérience beaucoup plus récente de Tetsuro Matsuzawa en laboratoire. Il a étudié la compétence numérique des chimpanzés d'abord avec des nuages de points, puis en leur accolant des chiffres arabes. Le film montre un animal voyant un nuage de points et pointant avec son doigt sur le chiffre arabe correspondant. Il arrive à extraire la quantité des nuages de points, qui ne se répètent jamais et n'ont pas de forme particulière. Seul le nombre de points diffère. Comme vous pouvez le constater, ce chimpanzé est assez fort, mais pas plus qu'une personne humaine entraînée convenablement. Cela signifie que rien ne s'oppose à ce qu'un animal apprenne des symboles. Les espèces animales, pour des raisons qui restent encore à comprendre, ne conçoivent pas spontanément de systèmes de symboles. L'espèce humaine a, en revanche, cette capacité toute particulière d'en concevoir. Les compétences numériques des animaux et des humains sont pourtant assez proches.

On peut ici se poser la question du rôle de l'entraînement sur des animaux ayant passé leur vie entière dans un laboratoire. Il existe néanmoins des expériences ayant été réalisées dans des milieux naturels ou semi-naturels. Elles suggèrent que les animaux disposent d'un certain nombre de ces compétences de façon spontanée. Par exemple, ici, un macaque en liberté est attiré vers un expérimentateur qu'il rencontre pour la première fois. On lui montre que l'on cache un certain nombre d'objets dans une pochette, par exemple trois morceaux de pomme. Dans une autre pochette, l'expérimentateur cache deux morceaux de pomme et un caillou, avec exactement le même nombre de mouvements. L'animal va chercher la pochette où ont été cachés le plus de morceaux de pomme. Ces expériences ont été menées chez les primates, et chez diverses espèces animales, comme chez les lions. Ils ont un sens du nombre de lionnes en train de chasser ou d'attaquer dans leur groupe.

Le sens du nombre semble provenir de deux sources principales. La première est la nécessité de garder une trace des sources de nourriture et du nombre associé à ces sources. La seconde est la nécessité de connaître le nombre de congénères dans un groupe social.

La découverte tout à fait révolutionnaire, qui ne figurait pas dans *La Bosse des maths* car elle est récente, est celle de l'existence de neurones des nombres. Elle est aujourd'hui explicite. Si l'on enregistre chez l'animal des neurones uniques dans des régions qui semblent homologues à celles de l'espèce humaine, ce qui est difficile, voire impossible chez l'homme, on trouve des neurones qui répondent sélectivement à certains nombres plutôt qu'à d'autres. Il existe donc un code neural.

Sur ce graphique, chacune des courbes correspond à un neurone différent. Le taux de décharge de ce neurone dont la courbe est notée en vert est maximal lorsqu'il y a trois objets, décroît lorsqu'il y a deux ou quatre objets, et est à son minimum lorsqu'il n'y a qu'un seul objet. Il s'agit évidemment de représentations concrètes d'ensembles d'objets. Différents neurones préfèrent différents nombres. Chacun d'eux a une très jolie courbe d'accord par rapport à un certain nombre. Cela signifie qu'il existe une représentation approximative et floue des nombres. Le neurone ne représente pas exactement trois ou cinq, mais il préfère la numérosité trois ou cinq, c'est-à-dire la quantité numérique d'un ensemble d'objets.

Mes recherches les plus récentes ont consisté à montrer que ce code neural existe également chez l'homme, et que si l'on développe une théorie mathématique de la prise de décision à partir de ce code, on peut rendre compte de pratiquement tout ce que l'on connaît du comportement numérique élémentaire, par exemple, dans la tâche de comparaison de nombres dont nous parlions tout à l'heure. Il est assez difficile de comparer quatre et cinq sur la base d'un tel code, car il y a peu de différence de décharge des neurones entre quatre et cinq. La décision sera donc ralentie. L'effet de distance peut donc être expliqué par le taux de recouvrement des décharges.

Ceci est révolutionnaire dans le domaine des neurosciences cognitives. La chaîne est de plus en plus complète du neurone unique jusqu'au niveau de décision conceptuelle chez l'homme, avec une modélisation mathématique faisant le lien entre les deux.

Concernant l'homologie, domaine de recherche également très actif, voilà une expérience où le cerveau humain a été gonflé artificiellement par ordinateur. Notre cerveau est, en effet, très plissé. Il est donc difficile de voir dans ses sillons. Un algorithme informatique permet de le déplisser. Il a ici été mis à la même taille qu'un cerveau de singe macaque. Ce type de transformations met au jour une assez bonne homologie entre les régions activées chez l'homme lors de calculs et localisées grâce à une Imagerie de Résonance Magnétique (IRM), et les régions où se trouvent les neurones des nombres chez le singe macaque. Des différences considérables existent néanmoins, notamment dans le cortex frontal. Savoir ce qui nous distingue des espèces animales est un autre grand sujet d'exploration. Nous sommes un primate différent des autres. La capacité de symbolisation est tout à fait particulière à notre espèce.

Concernant l'espèce humaine, la recherche chez le très jeune enfant a montré que les bébés, à quelques mois de vie, voire à la naissance d'après quelques expériences menées dès leur venue au monde, sont déjà sensibles à certaines règles élémentaires de l'arithmétique et au nombre d'un ensemble d'objets. J'ai choisi ici une expérience assez récente de Koleen McCrink. Les bébés voyaient cinq objets cachés derrière un écran, puis cinq autres objets qui s'y cachaient également. Mais lorsque l'écran disparaissait, il ne restait que cinq objets au lieu de dix. Ici, 5 + 5 devrait faire 10, mais fait 5. Les enfants regardent longuement ce type de situation. Comparé à une situation normale, le bébé réagit à la nouveauté numérique. La taille des objets change subtilement. Rien dans leur taille ne permet donc d'expliquer le comportement des enfants. Il s'agit bien du nombre d'objets.

De très nombreuses expériences du même type ont montré de façon indirecte, par des méthodes de comportement, que le cerveau de l'enfant réagit au nombre. On peut également utiliser des méthodes d'imagerie cérébrale adaptées aux jeunes enfants, même si cela reste difficile. On dispose par exemple de systèmes d'enregistrement électro-encéphalographique avec un casque à électrodes placé à la surface du scalp du bébé. Dans cette expérience, des séries de quatre objets sont présentées, puis soudain un ensemble de huit objets. Il s'agit d'une méthode d'adaptation : on adapte le cerveau de l'enfant à un certain nombre, puis on observe la réaction de nouveauté, de désadaptation, lorsqu'un nouveau nombre apparaît. Vous constatez que l'on change également parfois l'identité des objets.

Cette expérience menée par Véronique Izard et Ghislaine Dehaene-Lambertz a permis de déterminer que certaines régions cérébrales répondent à l'identité des objets, et d'autres à la quantité numérique. Les régions pariétales, notamment l'hémisphère droit, très proches des régions observées chez l'adulte, répondent déjà à la nouveauté numérique. D'autres régions, là encore homologues à celles de l'adulte, réagissent au changement d'objets. Il est remarquable de penser que le cerveau de l'enfant est déjà organisé chez des bébés de trois mois. De grandes voies de traitement de l'information sont déjà en place et séparent identité, nombre et position spatiale des objets. Il s'agit du socle sur lequel se feront les apprentissages ultérieurs. Il convient, bien sûr, de ne pas tomber dans une sorte de nativisme naïf considérant que tout est déjà présent à la naissance. Ce n'est évidemment pas le cas. Les représentations évoluent, mais en partant d'un état déjà très structuré.

La pertinence de ces éléments pour l'éducation a parfois été mise en cause. La compétence du bébé a-t-elle un quelconque rapport avec ce qui est appris à l'école ? Un article paru cette année dans *Nature* porte sur les enfants de fin de maternelle, à qui les notions d'additions, et notamment celles des additions à plusieurs chiffres, n'ont pas encore été enseignées. On leur présente des problèmes concrets sous une forme linguistique avec des symboles en chiffres arabes, du type : « Sarah a 21 bonbons. Elle en obtient 30 de plus. Jean en a 34. Qui en a le plus ? ». Il s'agit de combiner les deux premiers nombres, et de comparer le résultat avec le troisième. L'astuce est de choisir des distances suffisamment grandes dans ces problèmes, pour qu'il soit possible de répondre sur la base de l'intuition arithmétique.

On s'aperçoit que les enfants, avant même tout apprentissage de ce type d'opérations, ont des intuitions. Les intuitions qu'ils avaient dans le domaine des ensembles de points se sont donc transférées aux opérations plus symboliques. Leurs performances ne sont pas parfaites, mais elles sont supérieures au hasard. L'enfant apporte des intuitions, mais pas un calcul exact. Il est intéressant de constater que le taux de réussite à ce type de problèmes est partiellement corrélé à la réussite à l'école dans des problèmes arithmétiques plus standards. L'intuition précède donc le calcul et l'arithmétique formelle enseignés à l'école. Elle guide et prédit la réussite des enfants dans le domaine.

Calcul de l'exact

Seule l'espèce humaine, par le langage et le symbole écrit, parvient à dépasser l'approximation et à réaliser de grands calculs de l'exact. Nous avons développé depuis des années en laboratoire un modèle qui fait référence sur les grands circuits intervenant dans le domaine de l'arithmétique mentale et élémentaire. Je vous ai parlé, depuis le début de mon intervention, de la représentation des quantités, ou grandeurs numériques. Il ne faut pourtant pas oublier que, dans le cerveau d'un adulte bien éduqué, d'autres codes existent, comme le code verbal ou la forme visuelle (en lettres ou en chiffres arabes) des nombres. Nous passons sans cesse de l'un à l'autre de façon quasiment automatique, fluide et non consciente, alors que cette opération fait appel à des circuits cérébraux.

La fluidité du passage d'une représentation à l'autre nous permet de nous adapter à un problème arithmétique posé. Elle ne vient pas spontanément à l'enfant. Nous sommes en train de découvrir que sur le plan du développement du cerveau, l'automatisation des liens entre représentations symboliques et non symboliques prend beaucoup de temps.

Dans une expérience datant de 2005, les modifications de l'activité cérébrale au cours de calculs arithmétiques ont été examinées. Deux endroits voient l'activité cérébrale s'accroître au fur et à mesure de l'acquisition de l'automatisation des calculs, avec des chiffres arabes : ce sont, la région pariétale prenant en compte le sens des quantités et une région ventrale semblant associée à la représentation orthographique et visuelle des symboles.

Il est assez naturel de penser que ces deux régions soient mises en corrélation lorsque l'activité en rapport avec la fluidité d'utilisation des chiffres arabes augmente. Il est également très intéressant d'observer au contraire les diminutions d'activité. Elles se situent à l'avant du cerveau, dans ce que l'on appelle le cortex préfrontal, particulièrement développé dans l'espèce humaine. Elles correspondent exactement à l'automatisation. Au début de l'apprentissage, mettre en liaison des symboles avec des quantités n'est pas une activité automatique. Cela demande un effort de la part de l'enfant, tout comme le calcul lui-même.

Ces régions préfrontales du cerveau seront donc engagées de façon massive. Elles interviennent dans les représentations conscientes et la mobilisation intentionnelle avec effort de représentations mentales. Le calcul sera lent, dépendant de l'attention et de l'effort produit par l'enfant. C'est seulement très progressivement, sur plusieurs années, que l'automatisation déplacera la représentation du cortex frontal vers des régions plus postérieures. Ce phénomène est, du reste, extrêmement général. Il se produit à l'école chaque fois qu'un objet nouveau ou la mise en liaison nouvelle de deux objets sont introduits. Le cortex frontal joue un rôle particulier dans cette mise en liaison et dans l'engagement de l'enfant.

Il faut ensuite travailler pour automatiser les représentations, les déplacer, et libérer le cortex frontal pour d'autres tâches. Le cortex frontal semble responsable du fait que nous ne puissions pas effectuer plusieurs tâches en même temps. Lorsque l'on est engagé dans une opération de calcul arithmétique, il est impossible d'écouter en même temps la radio ou de réaliser une carte mentale. Il faut libérer les représentations dans le cortex frontal par l'automatisation pour pouvoir accéder à des niveaux de traitement plus élaborés.

Nous avons démontré récemment, en collaboration avec Pierre Pica du CNRS, la dépendance entre le calcul exact, l'apprentissage des symboles et l'éducation en étudiant la situation tout à fait particulière d'enfants et d'adultes normaux sur le plan neurologique, mais dont la culture ne leur donne pas accès aux mêmes types de représentations numériques que nous. Nous avons notamment étudié les Indiens Mundurukus d'Amazonie, qui n'ont que très peu d'accès à l'éducation et dont le langage même ne permet pas de parler des nombres de façon précise. Il existe des mots pour un, deux, trois et quatre. Le mot pour cinq signifie en réalité « une poignée » ou « une main ». Ces mots ne sont pas impliqués dans un comptage. La notion de comptage sériel n'existe pas chez eux. Ils ne peuvent d'ailleurs pas réciter « un, deux, trois » dans l'ordre, de façon rapide, en les appareillant avec des objets. Ces mots se comportent plutôt comme des adjectifs qui qualifieraient un ensemble d'objets. Ils signifient en fait « à peu près deux », « à peu près trois » ou « à peu près quatre ». C'est en tout cas l'interprétation que nous en avons.

Si l'on regarde des courbes montrant combien de fois une personne a utilisé le mot « quatre » pour quatre, cinq ou six objets, on constate qu'elle a pu utiliser le mot « quatre » pour cinq ou six objets. La courbe est floue. Le pic correspondant aux quatre objets existe, mais il n'est pas particulièrement élevé. La personne ne dit d'ailleurs pas toujours « quatre » lorsqu'on lui présente quatre objets. Elle dit parfois « quelques », « peu » ou « beaucoup ».

Ce système flou des nombres s'arrête donc au-delà de cinq. D'autres peuples s'arrêtent au-delà de trois. J'ai, par exemple, été frappé par un collier munduruku rapporté par Pierre Pica, composé de mains, d'ailleurs admirablement sculptées. Certaines n'ont que quatre doigts. Cela n'a visiblement pas choqué le sculpteur. Voilà un exemple amusant de système approximatif.

Nous avons, par ailleurs, découvert que ces gens étaient remarquablement compétents dans le domaine de l'intuition arithmétique. Cela confirme l'idée selon laquelle cette intuition universelle existe. Ils n'étaient pourtant pas très compétents dans le domaine du calcul exact, résultat de l'éducation avec des systèmes de symboles. Voilà deux exemples de tâches effectuées chez eux : dans le premier, un nuage de points descend dans une boîte de conserve (il s'agit du Powerpoint que nous avons utilisé chez eux), puis un second nuage apparaît. Il faut dire s'il y a plus de points dans la boîte ou dans le second nuage. Nous en avons tiré une courbe psychophysique. Une fois de plus, la distance détermine le succès de cette tâche. Comme vous pouvez le constater, les sujets français sont au même niveau que les Indiens Mundurukus. Ils savent donc effectuer cette tâche sans aucun entraînement. Ils n'ont pas besoin qu'on leur apprenne le concept de l'addition dans ce contexte concret, ni le concept de « plus grand » et « plus petit ». Ils n'ont aucunes difficultés particulières. On peut montrer qu'ils se déterminent bien en fonction du nombre de points et non de la surface des nuages.

Une seconde tâche montre à nouveau des objets qui descendent dans une boîte de conserve. Puis certains en sortent. Il faut estimer combien il reste d'objets dans la boîte. Nous avons choisi des problèmes où la bonne réponse est 0, 1 ou 2. Les sujets pouvaient répondre par un mot ou en pointant de façon non verbale. Dans les deux cas, nous avons observé que dans cette tâche qui demande un calcul exact, les performances des Indiens Mundurukus s'écroulent quand le nombre d'objets devient assez grand. Les Français conservent, eux, un niveau de performance assez élevé. De leur propre aveu, ils doivent compter le nombre de points pour réaliser cette tâche. Les performances des Indiens Mundurukus, représentées par la courbe verte, s'accordent avec un modèle purement approximatif.

Ces exemples sont une bonne métaphore de ce que l'éducation modifie dans l'intuition mathématique. Les concepts de nombre exact et de comptage sont déjà le résultat d'une acquisition culturelle. Certains peuples n'ont pas inventé le comptage. Ce n'est pourtant pas une invention très difficile. Beaucoup d'enfants ont une intuition, lorsqu'ils comptent avec leurs doigts par exemple. Cela peut venir assez vite.

Dyscalculie

Je pense qu'il est important que les enseignants aient connaissance de ce point. Etant donné que notre cerveau est responsable de nos compétences en arithmétique comme ailleurs, il peut exister des lésions cérébrales ou des difficultés conduisant à perturber les intuitions numériques. Ces problèmes dans le domaine du calcul sont beaucoup moins connus que la dyslexie. Je continue à être un peu choqué de constater que beaucoup d'enseignants n'ont pas idée que les difficultés des enfants peuvent ne pas être dues à la paresse, mais à des problèmes cérébraux ou à leur environnement socioculturel. Les enseignants sont très sensibles aux problèmes socioculturels. La prise de conscience est bien moins importante concernant les difficultés cérébrales.

La recherche a montré que chez certains enfants souffrant de difficultés particulières en mathématiques, des anomalies cérébrales sont observables dans les régions dont nous avons parlé, notamment les régions pariétales gauche ou droite. On parle de dyscalculie dans la mesure où un enfant présente dans le domaine arithmétique des difficultés sévères non imputables à des difficultés sensorielles, des anomalies dans l'environnement familial ou éducatif ou un déficit général d'intelligence. Ce ne sont donc pas des enfants ayant des difficultés de langage. Ces enfants présentent des difficultés extraordinairement sévères, même pour des opérations aussi simples que 7-3. Ces difficultés majeures dans la compréhension même de ce que sont les nombres peuvent se présenter à un jeune âge.

Une étude a porté sur des enfants, anciens prématurés, particulièrement vulnérables à cette maladie. Elle était bien faite dans la mesure où il s'agissait toujours de comparer d'anciens prématurés, dont certains étaient dyscalculiques et d'autres non. Les autres conséquences de la prématurité étaient également contrôlées. Une perte de densité de la matière grise a été observée précisément aux coordonnées s'activant lors de calculs chez un adulte normal.

Une autre étude portant sur le syndrome de Turner, maladie génétique de femmes ne possédant qu'un seul chromosome X, a montré une anomalie de l'organisation fine de la matière grise dans cette région, cette fois principalement dans l'hémisphère droit, et une activation anormale mesurée dans un diagramme fonctionnel. On commence donc à penser que chez certains enfants, un rôle causal entre anomalies anatomiques de cette région et perte de l'intuition existe. Certaines tâches très simples et concrètes peuvent mesurer les difficultés de l'enfant.

L'exposition de l'enfant à l'alcool *in utero*, ou syndrome de l'alcoolisation fœtale, est également une cause associée fréquemment à la dyscalculie. Lorsque la mère a bu à des moments cruciaux de la grossesse, notamment au moment où les neurones migrent dans le cortex, les enfants peuvent répondre de façon totalement absurde à une tâche d'estimation cognitive qui consiste à répondre à des questions nouvelles auxquelles on n'a pas réfléchi auparavant et au sujet desquelles on peut avoir certaines intuitions. Dans un test où l'on demande d'estimer la longueur maximale d'un couteau de cuisine, même avec une tolérance allant jusqu'à 150 cm, les réponses peuvent être tout à fait aberrantes. Ce genre de tests est particulièrement frappant. A l'âge adulte, ces enfants pourront avoir des symptômes de très mauvaise gestion de l'argent, avec de grandes difficultés à avoir des intuitions sur la monnaie ou sur les distances. Souvent, les nombres et l'espace vont ensemble. Les régions cérébrales qui s'y intéressent respectivement sont très proches dans le cerveau.

Ce domaine de recherche est très actif. On essaie de déterminer le noyau du déficit et d'en obtenir les mesures. Dans un travail en cours avec Manuela Piazza, on présente aux sujets des ensembles de seize points, puis un ensemble plus petit, dont il faut dire s'il contient plus ou moins de seize points. La précision de la discrimination, ici le « paramètre W », mesurée de façon quantitative, s'améliore avec l'âge. Le système numérique est de plus en plus précis. Le point correspondant à la population des enfants dyscalculiques, dans ce cas âgés de 11 ou 12 ans, est très en dehors de la courbe. Leur système d'estimation n'est pas suffisamment précis.

Il ne faudrait pas simplifier exagérément la complexité des troubles dyscalculiques pouvant exister chez l'enfant. De la même manière que la dyslexie s'exprime sous plusieurs formes, plusieurs types assez différents de problèmes sont liés à la dyscalculie. Nous n'avons pas encore établi de très bonne théorie concernant cette maladie. On pense que des troubles congénitaux de la représentation pariétale des grandeurs numériques perturbant l'intuition du nombre peuvent exister. Cela a été montré de différents syndromes. Des troubles associés au réseau du langage ou peut-être à la mise en connexion de ces différentes représentations entre elles pourraient également être associés à d'autres types de troubles.

Certains enfants ont par exemple des déficits sélectifs dans l'apprentissage des tables de multiplication. Un ensemble de problèmes est ici associé à la mise en mémoire de faits verbaux, particulièrement important dans le domaine de la table de multiplication. La caractérisation complète de la nature des déficits reste donc à faire. Pour une grande fraction des enfants, des déficits particuliers dans la représentation des quantités peuvent exister.

Cela ne signifie pas que l'on ne peut pas intervenir. Ce point est extrêmement important. Les sciences du cerveau ne sont pas en opposition avec la capacité d'apprendre, au contraire. Le cerveau, organe de l'apprentissage, est plastique et modifiable. Même en cas de dyslexie ou de dyscalculie, une intervention est possible. Grâce à des logiciels comme celui que nous avons développé en laboratoire avec Anna Wilson, grâce à des jeux ou bien entendu grâce à des interventions thérapeutiques intenses, beaucoup de problèmes peuvent être corrigés.

Nous sommes ici en présence d'un jeu très simple que nous avons développé par ordinateur. L'enfant voit des coffres au trésor. Il doit choisir celui dans lequel il pense qu'il trouvera le plus de pièces. Ces pièces permettront à son personnage, un dauphin, d'avancer sur une sorte de jeu de l'oie pour battre à la course le personnage de l'ordinateur représenté par un crabe. Cela conduit l'enfant à estimer et comparer les quantités, parfois dans le contexte d'opérations numériques dont la complexité varie. L'enfant devait par exemple choisir entre 4+3 et 8-6, puis mettre en relation les nombres avec des déplacements dans l'espace pour renforcer les liens entre nombres et espace.

Nous commençons à tester ce type de logiciels. Il est important de noter qu'ils peuvent avoir un effet important sur la motivation de l'enfant. Il en va de même pour les jeux sociaux à plusieurs. L'intérêt du logiciel est qu'il détecte le niveau de l'enfant et le type de problèmes lui posant le plus de difficultés, puis les lui présente de façon répétée et sans jamais se fatiguer. Les séances d'orthophonie, elles, ne peuvent pas durer des heures tous les jours. Du point de vue du cerveau, la répétition et l'entraînement sont des points fondamentaux. Ils permettent de surmonter les déficits. Des séances d'orthophonie d'une demi-heure par semaine ont un impact très faible. Il convient de se focaliser sur les problèmes, mais sans décourager l'enfant. Le rôle de l'attention, des émotions et de la motivation est primordial.

Des résultats très intéressants sortent actuellement au niveau international. Une étude Carnegie aux Etats-Unis vient de montrer que le fait de jouer à des jeux de type jeux de l'oie dix minutes par jour pendant quinze jours change considérablement les capacités arithmétiques de l'enfant et prédit ses compétences deux ans plus tard. Le rôle de l'environnement familial est ici important. Dans une famille « normale », les enfants auront accès à ce genre de jeux. Cela ne sera pas forcément le cas dans les familles défavorisées. Peut-être l'école peut-elle intervenir dans ce domaine, pourquoi pas en dehors des heures de cours. Ce travail se déroule dans un contexte ludique, avec des enfants heureux. Cette étude m'a beaucoup frappé.

Conclusions

Les jeunes enfants possèdent donc déjà de profondes intuitions mathématiques avant d'entrer à l'école. Elles doivent être utilisées comme socle de l'apprentissage. Les fondements des mathématiques se retrouvent, en effet, dans ces représentations précoces, auxquelles des objets sont plus adaptés que d'autres. Le boulier par exemple, objet culturel remarquable dans la mesure où il s'agit d'une représentation symbolique du nombre, y compris à plusieurs chiffres, fait appel à l'intuition des objets déplaçables. Les doigts sont également un support très naturel de l'addition. Lorsque j'ai appris que des professeurs refusaient qu'ils s'en servent, j'ai été particulièrement choqué. Je ne vois pas l'intérêt de nier aux enfants l'accès à ces intuitions. Au contraire, il faut le renforcer.

L'intuition ne fait pourtant pas tout. Il faut aller au-delà. Un certain nombre de concepts mathématiques vont bien au-delà de l'intuition de départ, et en particulier celui du calcul exact, même s'il doit être guidé par le sens du nombre. Les deux doivent être entraînés, sans oublier que les mathématiques sont un domaine dans lequel les objets servent de support. Après tout, l'invention des chiffres arabes est un support culturel, de même que celle de la calculatrice. Je ne vois pas pourquoi on ne l'utiliserait pas, en particulier lorsque notre cerveau n'est pas doué pour certaines opérations. S'agissant de la division à cinq chiffres, tout adulte utilisera sa calculatrice. Le fait d'expliquer à l'enfant comment la division fonctionne et de travailler au niveau des concepts présente un intérêt certain. Je ne suis pas en train de dire que l'on doive aborder toute la table de multiplications avec la calculatrice. Il faut, bien sûr, automatiser certaines opérations. Concernant la division à cinq chiffres, je pense, en revanche, que l'intérêt d'y travailler pendant des heures avec les enfants est limité.

Il convient de distinguer les compétences fondamentales devant être apprises et répétées, et devant faire l'objet d'un quart d'heure d'entraînement par jour et les apprentissages plutôt essentiels sur le plan conceptuel. C'est grâce à la répétition et au sommeil que les nouveaux éléments se stabilisent dans le cerveau.

L'intuition peut parfois induire en erreur. Nous n'avons pas encore évoqué ce point. Cela explique un certain nombre de difficultés pour les enfants. Le cas des fractions, que nous commençons à explorer dans le domaine des sciences cognitives, en est un exemple. Il est probable que l'intuition même des entiers et des cardinalités d'un ensemble d'objet nous empêche de percevoir ce qu'est une fraction, soit deux entiers mis en rapport. Comment comprendre que cela crée un nouveau nombre, que ce nombre se situe entre d'autres nombres entiers, que 3/4 ne sont égaux ni à 3 ni à 4, mais sont plus petits que 1, ou que dans 1/x, plus x est grand, plus 1/x est petit ? Notre intuition nous joue des tours dans ces domaines. Le fait que la taille de la fraction 1/16 n'ait rien à voir avec celle du nombre 16 pose d'énormes problèmes aux enfants. Il est peut-être plus aisé de comprendre leurs difficultés si l'on a conscience qu'ils en restent à leur intuition fondamentale des quantités.

D'autres intuitions peuvent, dans ce cas, être trouvées. On rencontre le concept des fractions parce qu'il correspond à certaines situations réelles du monde physique. Le travail pédagogique consiste donc aussi à s'appuyer sur d'autres intuitions nouvelles, comme le concept de division de l'espace par exemple. La variété des situations dans lesquelles le concept de fraction apparaît permettra à l'enfant de la dégager progressivement.

J'ai mentionné le fait que certaines catégories d'enfants présentent un risque particulier. Il convient d'être conscient des différentes situations possibles. La prénatalité n'est pas anodine, même si ces enfants s'en sortent bien par la suite. Les jeux et les logiciels informatiques mobilisant l'attention de l'enfant permettent d'améliorer la situation.

Je souhaiterais pour terminer vous exposer deux idées simples et plus générales. Il est essentiel que les enseignants s'informent sur les avancées des sciences cognitives pour avoir un bon modèle du cerveau de l'enfant. On ne peut pas tenter de modifier une situation sans avoir compris très profondément ce qui pose problème.

Par ailleurs, on a pu penser qu'il suffisait de savoir des choses générales sur l'intelligence de l'enfant, les algorithmes d'apprentissage ou la plasticité. Certaines connaissances sont très importantes dans ces domaines. Mais l'idée d'un mécanisme général d'apprentissage qui fonctionnerait dans tous les domaines avec une intelligence logico-mathématique de l'enfant est dépassée. Nous nous apercevons de plus en plus que des compétences spécifiques existent. Il convient de regarder les précurseurs du langage, de la lecture, du calcul ou de la géométrie. Malheureusement peut-être, il faut se pencher d'un peu plus près sur les compétences particulières de l'enfant.

Enfin, je voudrais terminer avec quelques mots de prudence, comme je le fais à chaque fois que je m'exprime devant un public appartenant au domaine de l'éducation. En effet, passer du laboratoire à l'école est extrêmement difficile, voire dangereux. Des erreurs historiques ont été commises. D'abord, les recherches scientifiques que je viens de vous présenter sont très récentes. Elles présentent donc une part d'incertitude. Les images d'activation cérébrale en particulier, toujours très attirantes, doivent être prises avec beaucoup de prudence. Je vous invite à prendre du recul par rapport à ce que vous pouvez lire. Il est trop facile de tirer des conclusions d'une recherche en particulier, même si nous avons la chance, dans le domaine de l'arithmétique, de disposer maintenant d'un certain nombre de recherches qui commencent à converger. Du reste, même si l'on connaissait parfaitement les processus cognitifs de l'enfant, on ne pourrait pas en déduire directement « la » méthode à appliquer. La manière de faire passer ces idées aux enfants constitue un domaine de recherche à part entière. Il s'agit de votre domaine. Beaucoup de méthodes restent sans doute possibles, même si certaines peuvent être éliminées.

Je voudrais également mentionner l'existence, par le passé, de cas de passage trop rapide de la connaissance scientifique à l'enseignement. L'idée de la lecture globale par exemple, est liée à des idées nées dans le domaine de la psychologie et ayant été mal interprétées. Il n'y a pas de méthode unique d'enseignement. Il existe en revanche une réelle capacité d'évaluation des compétences des enfants dans des tests plus pertinents que ceux utilisés actuellement. Cela permettrait également d'évaluer le système d'éducation. Il serait très intéressant d'établir une relation entre sciences cognitives et sciences de l'éducation.

Je vous remercie.

Échanges avec la salle

De la salle
Michel Fayol fait-il preuve de prudence lorsqu'il dit que les dyscalculies n'existent pas, ou n'ont pas de fondements scientifiques ?

Stanislas Dehaene
Je n'étais pas là pour l'entendre mais cela m'étonne un peu.

De la salle
Il a fait allusion à la réponse que vous feriez.

Stanislas Dehaene
Pas de fondements scientifiques ? Cela me paraît un peu curieux. Je ne sais pas ce qu'il a voulu dire par là. Je peux, en tout cas, vous assurer que la plainte des enfants que nous avons vus à l'hôpital est réelle. Ils sont très désorientés car ils peuvent être brillants par ailleurs. Le phénomène existe. L'explication est peut-être réductrice. Je ne suis pas certain que tous les enfants appartiennent à la même case. Je suis, en revanche, persuadé, comme dans le domaine de la dyslexie, qu'il est impossible de faire une distinction nette et catégorique entre des enfants ayant des problèmes biologiques et d'autres ayant des problèmes relevant de la sphère éducative. Typiquement, la courbe des tests passés par les enfants est en cloche. Il serait merveilleux d'obtenir une petite bosse sur la gauche qui distinguerait une certaine catégorie d'enfants avec de vrais déficits calculiques, mais cela ne se passe pas du tout de cette façon. Où doit-on placer la limite entre les lecteurs normaux, les mauvais lecteurs et les dyslexiques, ou entre les enfants normaux et les dyscalculiques ? Cette question est arbitraire. Je ne crois pourtant pas que l'on puisse nier que le phénomène existe.

De la salle
Vous avez présenté une courbe de réponses neuroniques pour les nombres de 1 à 5. J'aimerais savoir s'il existe aussi des neurones correspondant à des nombres supérieurs.

Stanislas Dehaene
Les animaux dans cette expérience ont effectué des tâches jusqu'à 5. Plus récemment, le travail a été étendu jusqu'à 30. On continue à trouver des neurones correspondant approximativement aux nombres. Les limites ne sont pas très nettes. On observe un effet logarithmique, c'est-à-dire que plus on s'approche des grands nombres, plus les limites sont floues, et moins on trouve de neurones correspondants.

De la salle
J'aimerais savoir s'il existe une intuition concernant la quantité. Il apparaît chez les jeunes enfants, en particulier dans les classes maternelles, que leur notion des quantités est assez défaillante. Il faut présenter un certain nombre d'activités permettant de la leur apprendre. Cette intuition existe-t-elle ou doit-on l'enseigner ?

Stanislas Dehaene
C'est une bonne question. Par exemple, lorsque vous refaites les expériences de 5+5=10 avec des quantités non discrètes comme des piles de sable, les intuitions des enfants ne sont pas bonnes du tout. Lorsqu'on additionne deux tas de sable, le tas obtenu leur paraît trop petit. Il semble que le sens du nombre soit plus développé, ou en tout cas plus précis que le traitement des quantités. Je ne sais pas si l'on peut parler d'une absence totale de cette intuition. Cela m'étonnerait. Cela constitue un domaine de recherche. Par exemple, les enfants apprennent très tôt le sens des mots « grand » et « petit ». Ils appliquent ces mots à toute sorte de domaines. Il doit exister le sens d'un continuum orienté, avec un pôle « grand » et un pôle « petit », qu'il s'agisse de la taille, de l'intensité des sons ou des nombres. Les intuitions existent dans ce domaine, mais le nombre permet une certaine précision.

Cela a un peu été une surprise. Beaucoup de gens étaient extrêmement sceptiques concernant ces recherches, pensant que les intuitions portaient non pas sur les nombres mais sur les surfaces, la taille ou la densité des objets. Nous avons dû sans cesse réfuter ces autres interprétations. Nous nous apercevons maintenant que le nombre est plus facile à extraire que ces autres données. Les enfants codent mieux les nombres que les autres quantités.

AnnaMaria Gilberti
En Italie, une recherche a été menée après la généralisation de l'usage de la ceinture en voiture, qui augmente la proportion de personnes qui survivent aux accidents avec des séquelles. On a étudié les réflexes des patients concernant leur capacité à évaluer les risques. On a constaté qu'ils perdent la faculté d'évaluation des risques. Une autre recherche a découlé de cette étude, concernant la peur des mathématiques. Connaissez-vous ce rapport ? Il semble qu'il existe des zones cérébrales qui commandent à la peur du risque, de la difficulté et des mathématiques !

Stanislas Dehaene
Je n'ai pas connaissance de cette recherche. Je n'ai pas compris si vous parliez de personnes adultes ayant subi un accident de voiture. La notion de peur des mathématiques, à ma connaissance, est un phénomène réel très souvent associé à la dyscalculie. Les enfants développent une sorte de syndrome émotionnel secondaire qui associe l'ensemble des mathématiques à une chose épouvantable où ils sont dévalorisés et où leurs camarades se moquent d'eux. Cela crée une deuxième situation émotionnelle particulièrement difficile à surmonter. Il me paraît en revanche très réducteur de parler d'une région cérébrale commandant à cette peur. Il s'agit d'un ensemble de choses.

Je ne suis pas certain de voir le rapport avec les accidents de voiture, même s'ils sont effectivement un problème majeur concernant les lésions chez l'adulte créant toutes sortes de syndromes, comme des micro-lésions très diffuses dans le cerveau induisant des problèmes de concentration.

De la salle
Vous avez évoqué tout à l'heure le fait que l'on jongle constamment entre au moins trois représentations des nombres, avec les codes verbal et chiffré et la quantité. Pourtant des études ont montré que le passage de l'une à l'autre était plus facile ou plus difficile dans certains enseignements. Concernant les enfants relativement jeunes en âge de construire ces passages, l'école doit-elle entraîner les trois, ou l'objectif d'arriver systématiquement au code symbolique chiffré doit-il être prioritaire, quitte à ne pas entraîner le phénomène cyclique de passage entre les différentes représentations ?

Stanislas Dehaene
C'est une bonne question, à laquelle je ne suis pas sûr de savoir répondre. J'ai effectivement l'intuition qu'on apprend très spontanément à nommer les chiffres arabes. Cela fait partie de leur connaissance de savoir les lire, donc de les nommer et de les prendre sous dictée. Ce lien se fait facilement et naturellement à l'école. Le lien des chiffres arabes vers les quantités demande certainement à être entraîné. Il peut être renforcé par des exercices comme des jeux de plateaux. Cela suffit probablement. Avec des liens entre code verbal et chiffres arabes, et chiffres arabes et quantités, l'ensemble du système peut se mettre en place. Je crois qu'il serait particulièrement intéressant de renforcer dans les écoles le lien entre chiffres arabes et quantités correspondantes, ainsi que de développer le sens de la vérification des résultats. Très souvent, les erreurs des enfants présentent un caractère absurde. Il suffirait de regarder les données du problème et le résultat pour s'apercevoir qu'il est faux, comme le résultat d'une soustraction supérieur au chiffre de départ. Développer ce genre de prise de recul chez l'enfant fondée sur l'approximation des quantités peut-être une manière de développer les liens entre chiffres arabes et quantités.

Jean-Louis Durpaire
Je me permets de poser une question. Dans le domaine de l'intuition, concernant les premiers nombres chez les enfants jeunes et la difficulté de l'intuition sur les nombres rationnels, des travaux portent-ils sur l'intuition des nombres réels, voire sur une partie des nombres décimaux ? L'élève a-t-il une idée de la continuité au sens réel ? Ou seule l'approche discrète est-elle intuitive ?

Stanislas Dehaene
Je crois que nous n'avons pas la réponse. C'est vraiment une bonne question. Peu de recherches portent sur les nombres décimaux et réels. Celles qui ont été menées suggèrent qu'il existe des effets d'interférence avec les nombres entiers. Par exemple, l'erreur consistant à penser que 0,18 est supérieur à 0,4 est tout à fait classique. Même chez l'adulte, l'accès automatique au sens des quantités continue de créer cette interférence. La recherche en est là. On voit les interférences avec le système des nombres entiers. Y a-t-il derrière une intuition profonde de la continuité des quantités ? Je ne serais pas surpris que ce soit le cas, et que cela soit en rapport avec le sens de l'espace.

Jean-Louis Durpaire
Une bonne visualisation des nombres réels se prédit-elle ?

Stanislas Dehaene
Je n'ai pas connaissance d'études très appropriées là dessus. Des études menées aux Etats-Unis par Sue Carey montraient que les enfants avaient un sens de la divisibilité infinie, et d'un continuum spatial. Des intuitions existent certainement dans ce domaine. Sont-elles exploitées dans l'étude des nombres réels, et à quel âge ?

De la salle
Même si vous ne l'avez pas dit clairement, l'une des conclusions indique que le rôle de l'école est de faire émerger les intuitions des enfants et de s'appuyer sur elles. N'est-il pas aussi de lutter contre elles, c'est-à-dire d'aider les enfants à inhiber certaines intuitions qui pourraient les induire en erreur ?

Stanislas Dehaene
C'est certain. Il faut identifier les situations où son intuition conduit l'enfant à l'erreur. Une grande part du travail de recherche scientifique a effectivement été de cerner les domaines où l'intuition nous induit en erreur. Il existe, par exemple, tout un domaine des sciences cognitives appelé la « physique naïve ». Il consiste à étudier les intuitions des gens en physique. On retrouve certaines des erreurs de la physique pré-newtonienne. Par exemple, si vous lâchez une boule dans un tuyau formant une boucle et que vous demandez où elle ira en sortant du tuyau, même un public d'étudiants vous répondra que la boule devrait continuer à suivre la courbe. L'idée qu'elle va tout droit n'est pas du tout intuitive. L'idée qu'un mobile laissé à lui-même bougera sans aucune force qui lui soit appliquée n'est pas non plus intuitive et a demandé un génie pour l'extraire ! Il faut donc cataloguer les intuitions et savoir sur lesquelles on peut s'appuyer parce qu'elles sont bonnes, et lesquelles il faut essayer de dépasser.

Evelyne Mazurier
Bonjour. Je suis IA-IPR à Paris. J'aimerais rebondir sur la question précédente. Vous avez fait allusion à l'erreur bien connue concernant la comparaison de 0,4 et 0,18. C'est en effet une erreur que nous connaissons tous. Vous sembliez dire que le constat scientifique existait. Avez-vous fait des études interculturelles sur cette erreur très fréquente, en tenant notamment compte du langage utilisé ?

Stanislas Dehaene
Pouvez-vous préciser ce que vous avez en tête ?

Evelyne Mazurier
Je pense à la façon d'exprimer les chiffres de la partie décimale.

Stanislas Dehaene
Je peux peut-être élargir un peu la question. Certaines différences culturelles sont effectivement intéressantes. Peu le sont, parce que l'on part tous du même système intuitif, mais les différents systèmes de notation et d'expression des nombres ont un impact sur ce qui est facile ou difficile dans le calcul. La comparaison avec le Chinois est particulièrement intéressante. Le système lexical chinois pour les nombres est beaucoup plus simple que le nôtre. On ne dit pas « onze » mais « dix un », ni « vingt » mais « deux dix ». Le lexique et la syntaxe apportent une transparence de la base 10. Des études transculturelles ont montré que l'impact est massif sur l'apprentissage chez l'enfant, au point que l'on pourrait se demander si nous ne devrions pas tous passer au Chinois, ce qui arrivera peut-être dans quelques années ! On pourrait introduire une sorte de langage simplifié chez l'enfant. Dire « deux dix un » pour « vingt-et-un » pourrait être une stratégie pédagogique, ou semer la confusion dans l'esprit des enfants. Je vous laisse en juger. Le résultat est, en tout cas, extrêmement net. Il y a des mois, voire une année de différence dans l'apprentissage du comptage.

Jean-Louis Durpaire
Je vous remercie. Je pense que nous ferons cette réforme en même temps que celle de l'orthographe !

Les acquisitions en mathématiques à l’école primaire : des compétences au centre des apprentissages

Bruno Suchaut, directeur de l’Institut de recherche sur l’éducation (Irédu) Sociologie et économie de l’éducation, Université de Bourgogne

Le débat sur la qualité des apprentissages des élèves à l’école primaire porte principalement sur le domaine de la maîtrise de la langue et peu sur celui des mathématiques. La première raison qui peut expliquer ce constat est que l’apprentissage de la langue a depuis toujours été considéré comme une priorité, à la fois en termes de place accordée dans les horaires des programmes et d’utilité sociale évidente. Il est donc logique que cette dimension fasse l’objet d’une attention toute particulière de la part de tous les acteurs de l’école. Une seconde raison tient au fait que les résultats de la France dans les enquêtes internationales sont davantage positifs en mathématiques qu’en lecture[33], ce qui conduit à centrer les critiques sur cette seconde dimension. On doit d’ailleurs à ce sujet préciser que l’on dispose beaucoup moins d’informations sur le niveau des élèves en mathématiques qu’en langue, cela s’explique par la participation erratique de la France aux enquêtes internationales dans cette discipline. Il ne s’agira pas ici de se prononcer sur le niveau des élèves en mathématiques, mais de montrer en quoi cette dimension des acquisitions tient une place très importante dans la réussite des élèves.

Ce texte se centre sur les compétences mobilisées par les élèves au cours de l’école élémentaire dans le domaine des mathématiques. Il s’agit d’étudier précisément la place de ces compétences dans les apprentissages des élèves et leur évolution au cours de la scolarité. Plusieurs aspects seront abordés pour traiter ce questionnement général. Il s’agira en premier lieu d’identifier de manière empirique les compétences relevant du domaine des mathématiques. En second lieu, les liens que les compétences en mathématiques entretiennent avec celles de la maîtrise de la langue seront mises à jour, commentées et interprétées. Ceci permettra de repérer les compétences de mathématiques les plus prédictives du niveau d’acquisition global des élèves à l’entrée au cycle 3. Une perspective dynamique sera ensuite mobilisée pour tenter de répondre à la question suivante : dans quelle mesure la maîtrise de certaines compétences de mathématiques détermine la réussite globale ultérieure, soit à l’entrée au collège ?

Notre démonstration se base sur l’analyse des résultats des élèves à des épreuves d’évaluation provenant de deux cohortes. La première cohorte (environ 700 élèves d’une circonscription départementale) mobilise les évaluations nationales de CE2 et de 6ème ainsi que des épreuves d’acquisitions en fin de 5ème. La seconde cohorte est celle du panel 1997 (environ 9500 élèves entrés au CP en 1997) suivis de l’entrée au CP à l’entrée au collège. Nous disposons pour ce deuxième échantillon des résultats à des évaluations de début CP et des résultats aux épreuves nationales (CE2 et 6ème). Le premier échantillon a servi de base à une étude sur les compétences des élèves et leur évolution (Morlaix, Suchaut, 2007) et les analyses ont été répliquées sur l’échantillon du panel 1997 qui présente toutes les conditions de robustesse en matière d’échantillonnage statistique. La comparaison entre les deux échantillons a été rendue possible car il s’agit dans les deux cas des mêmes épreuves nationales : septembre 1999 pour le CE2 et septembre 2002 pour l’entrée en 6ème. Parallèlement aux résultats des évaluations,

[33] Ainsi, à l’enquête TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) de 1995, la France se classait 13ème sur 41 pays.

des informations sur les caractéristiques sociodémographiques des élèves ont été relevées, ainsi que les performances en capacités cognitives sur un sous-échantillon d'élèves de la première cohorte.

I. Comment identifier les compétences ?

Les évaluations nationales visent à évaluer un large ensemble de compétences dans une perspective diagnostique, celles-ci étant définies par les commissions chargées de l'élaboration des épreuves. Les évaluations de CE2 de septembre 1999, qui seront particulièrement ciblées dans ce texte, comportent 7 champs de compétences : compréhension (41 items), outils de la langue (40 items), production d'écrits (10 items) pour le français ; travaux géométriques (17 items), mesure (32 items), travaux numériques (32 items), et résolution de problèmes (9 items) pour les mathématiques. Les 91 items de français se répartissent dans 18 exercices et les 80 items de mathématiques se partagent entre 27 exercices. Au total, ces épreuves rassemblent 171 items regroupés en 15 compétences de français et 27 de mathématiques, chacune de ces compétences correspond dans la grande majorité des cas à un exercice du cahier d'évaluation. Pour le domaine des mathématiques, la liste des compétences figure dans le tableau 1 suivant.

L'exploitation des résultats aux évaluations nationales pose de réels problèmes lorsque l'on souhaite travailler finement sur la structure des apprentissages des élèves. La première difficulté concerne l'échelle de mesure utilisée. Cette échelle est très variable selon le nombre d'items retenus pour mesurer chacune des compétences. Par exemple, la compétence « *effectuer des additions* » est évaluée par sept items alors que la compétence « *construire une figure simple sur un quadrillage* » ne concerne qu'un seul item. Selon le cas, la graduation de la réussite est donc très fluctuante d'une compétence à l'autre, allant de la simple dichotomie échec / réussite à une échelle graduée en différents scores. Une seconde difficulté est relative au seuil de maîtrise de la compétence. L'usage veut que l'on fixe ce seuil de réussite (commun à toutes les compétences) à 75%, mais les dissymétries entre les différentes échelles rendent cette solution imparfaite, notamment pour les compétences qui comportent très peu d'items.

Tableau 1 : Liste des compétences de mathématiques des épreuves de CE2 (1999)

Se repérer et se déplacer dans un quadrillage.
Utiliser les instruments de dessin pour achever un tracé.
Construire une figure simple sur un quadrillage en utilisant des propriétés de la figure.
Compléter par pliage (symétrie) une figure dessinée sur un quadrillage.
Associer une figure à une description.
Compléter un plan à partir de consignes.
Se repérer dans l'espace.
Tracer une figure à partir de consignes.
Se repérer dans la journée
Mesurer ou tracer un segment de longueur donnée.
Ranger des longueurs.
Associer une unité usuelle à une grandeur
Utiliser le calendrier.
Comparer des distances.
Résoudre un problème faisant intervenir une grandeur.
Choisir l'unité la mieux adaptée à un mesurage.
Effectuer des additions, posées, en ligne ou à poser.
Calculer des produits et des différences (calcul exact ou approché).
Calculer mentalement (calcul exact ou approché).
Transcrire en lettres des nombres écrits en chiffres et inversement.
Ranger des nombres.
Comparer des nombres donnés sous formes diverses.
Lire et/ou remplir un tableau à double entrée.
Exploiter un document « brut ».
Résoudre un problème à une opération.
Résoudre une situation de partage ou de groupement.
Effectuer un choix et en formuler la justification.

Une troisième difficulté n'est pas de nature méthodologique mais relève plutôt du domaine théorique. On peut en effet s'interroger sur la définition même des compétences et la capacité que peut avoir un item à évaluer réellement la compétence visée. De nombreux exemples pourraient être mobilisés pour justifier cette remarque. A titre d'illustration, l'exercice suivant, qui rend compte de la compétence « *résoudre un problème à une opération* » reflète une situation observée fréquemment au fil des exercices figurant dans les épreuves.

Exercice 25

a. Un automobiliste part de Nantes et va à Marseille. Il parcourt d'abord 518 kilomètres. Il lui reste 316 kilomètres à faire.

Quelle est la distance entre Nantes et Marseille ?

Pour réussir cet exercice, l'élève doit être capable de réaliser correctement plusieurs tâches cognitives. L'élève doit évidemment être dans la mesure de lire l'énoncé, puis de comprendre la question posée. Il doit ensuite identifier l'opération nécessaire pour répondre à cette question et l'effectuer sans erreur. On comprend bien que la réussite à cet exercice nécessite des compétences relatives à la lecture, à la compréhension et aux techniques opératoires. Cet exemple, volontairement réducteur, n'est pas isolé car il existe dans les évaluations nationales de nombreux exercices pour lesquels la compétence ciblée ne recouvre que partiellement les compétences effectivement mobilisées par les élèves pour réaliser la tâche demandée. Cela n'est pas anodin dans la mesure où cette constatation a un intérêt pédagogique en matière de remédiation. L'enseignant doit, en effet, pouvoir identifier correctement les lacunes des élèves et ne pas se tromper de cible. On doit néanmoins reconnaître la difficulté à saisir concrètement la notion de compétence dans le domaine de l'éducation (Crahay, 2006). Même si, d'un point de vue théorique, les auteurs s'accordent sur une définition (une compétence renverrait à un ensemble intégré de connaissances susceptibles d'être mobilisées pour accomplir des tâches), la question de la mesure demeure.

En outre, l'approche institutionnelle donne une image statique de la compétence dans la mesure où on se limite à une catégorisation par domaine d'acquisition et par discipline et ne permet pas de prendre en compte la dimension transversale des acquis des élèves. Or, il existe, de fait, des liens entre les apprentissages, ceux-ci se construisant en interdépendance. L'examen des corrélations entre les résultats des élèves dans les différentes compétences des évaluations de CE2 montre que certaines compétences de mathématiques affichent des corrélations élevées avec des compétences de français (tableau 2). Il est intéressant de noter que certaines compétences apparaissent plusieurs fois dans cette sélection, c'est le cas de « *calculer mentalement*» qui entretient quatre liaisons fortes avec des compétences de français variées ; c'est également le cas pour « *écrire sous la dictée...*» qui est fortement corrélée avec 3 compétences de mathématiques.

Tableau 2 : Corrélations les plus fortes (r ≥ + 0,35) entre compétences de mathématiques et de français au CE2

Compétences de mathématiques et de français	**Coefficient de corrélation**
Calculer mentalement Ecrire sous la dictée des mots courants, de petites phrases ou de petits textes	+0,41 ***
Résoudre un problème à une opération Ecrire sous la dictée des mots courants, de petites phrases ou de petits textes	+0,38 ***
Calculer mentalement Reconstituer la chronologie des évènements dans des textes de statuts variés	+0,36 ***
Effectuer des additions, posées, en ligne ou à poser Ecrire sous la dictée des mots courants, de petites phrases ou de petits textes	+0,36 ***
Résoudre un problème à une opération Reconstituer la chronologie des évènements dans des textes de statuts variés	+0,35 ***
Calculer mentalement Comprendre un texte et montrer qu'on l'a compris	+0,35 ***
Calculer mentalement Identifier certains aspects d'un texte	+0,35 ***

*** : significatif au seuil de 1%

A l'inverse, certaines compétences de mathématiques n'entretiennent aucun lien statistique entre elles comme « *associer une unité usuelle à une grandeur* » et « *lire et/ou remplir un tableau à double entrée* », ou entre « *utiliser les instruments de dessin pour achever un tracé* » et *« résoudre un problème faisant intervenir une grandeur* », ou encore entre « *se repérer dans l'espace* » et « *lire et/ou remplir un tableau à double entrée* ».

Afin de dépasser les problèmes méthodologiques relatifs à la mesure des compétences et de définir celles-ci de manière plus précise et objective, nous nous proposons de nous référer à la plus petite unité présente dans les épreuves d'évaluation, à savoir l'item. Notre travail s'inspire globalement des procédures utilisées pour les validations empiriques *a posteriori* des épreuves d'évaluation (De Ketele, Gérard, 2005). La démarche méthodologique adoptée permet d'appréhender les apprentissages des élèves de façon plus précise et plus dynamique en centrant l'analyse sur les items et non sur les compétences définies préalablement dans les épreuves. Même si cette approche comporte elle aussi des limites, notamment quant au degré de difficulté des items (Demeuse, Henry, 2004), elle présente des avantages certains.

D'un point de vue concret, cette approche permet d'utiliser une échelle de mesure commune puisque tous les items présentent le même barème de cotation : 0 pour une réponse erronée, 1 pour la réponse attendue. La question du seuil de réussite mentionnée auparavant ne se pose plus, puisque ce seuil est défini objectivement par la réussite ou l'échec, sans possibilité de situations intermédiaires[34]. Le point de départ de notre démarche est la production d'une matrice de corrélations qui intègre tous les items des épreuves (soit 171 items de français et de mathématiques pour les épreuves de CE2). Compte tenu du nombre très important de corrélations (14 535 coefficients de corrélation), seules celles supérieures à + 0,20, soit 317[35] ont été retenues. Si une bonne partie des corrélations (57% d'entre elles) se rapporte à des items appartenant à un même exercice et 86% à la même discipline, un nombre non négligeable de corrélations concerne des items provenant d'exercices différents.

Une phase préparatoire consiste à étudier individuellement chaque corrélation et à dresser ainsi une cartographie de l'ensemble des situations présentes. Le principe de cette étape préalable est d'identifier des blocs de relations au sein desquelles on retrouve le plus souvent les mêmes items. Cette procédure revêt, de fait, un caractère systématique puisque, pour chaque item, on identifie tous les autres items qui lui sont associés dans les corrélations. Au terme de cette phase, on aboutit à des groupements d'items fortement corrélés entre eux. Au niveau du CE2, 29 blocs d'items ont été identifiés (Morlaix, Suchaut, 2007). L'étape suivante consiste à étudier chacun des blocs de corrélations entre items. Il s'agit de tester statistiquement la pertinence des regroupements des liaisons entre les items d'un même groupe. Pour cela, nous allons mobiliser une méthode statistique, l'analyse en variables latentes (Aish-Van Vaerenbergh, 1997), qui doit permettre d'identifier, pour chaque regroupement d'items, une ou plusieurs compétences qui vont rendre compte des relations observées. Du point de vue technique, on estime des modèles de mesure à l'aide du logiciel LISREL[36] de façon à mettre à jour des variables latentes pouvant être interprétées comme des compétences, des aptitudes ou des capacités mobilisées par les élèves dans les évaluations nationales. Il s'agit donc, soit de valider chacun des blocs de relations en identifiant une compétence qui résume l'ensemble des relations considérées, soit de proposer une réorganisation des relations entre items en dégageant plusieurs compétences pour un même bloc relationnel. On doit ainsi obtenir au terme de cette première phase un ensemble de compétences qui structurent les résultats des élèves au CE2.

Un exemple peut permettre d'illustrer de comprendre notre démarche statistique (graphique 1). Il s'agit de l'analyse d'un regroupement de 7 items corrélés entre eux : 3 items de mathématiques d'un même exercice (items 36, 38 et 39) qui visent la compétence «*choisir l'unité de temps la mieux adaptée* », 2 items de mathématiques (items 19 et 20) qui concernent le repérage dans le temps (« *se repérer dans la journée d'après un emploi du temps* »), un item de mathématiques (item 31) se référant à la compétence « *utiliser un calendrier* » et un item de français (item 5) visant la compétence « *savoir appliquer les consignes courantes du travail scolaire*[37]». L'analyse statistique permet d'identifier une première compétence (comp35) qui se matérialise par les items 36, 38 et 39 de

---

[34] On mentionnera que cette dichotomie (échec/réussite) n'est pas adaptée à une interprétation diagnostique des évaluations nationales et que les barèmes de cotation de certains items comportent à l'origine d'autres paliers qui permettent une analyse des erreurs des élèves.

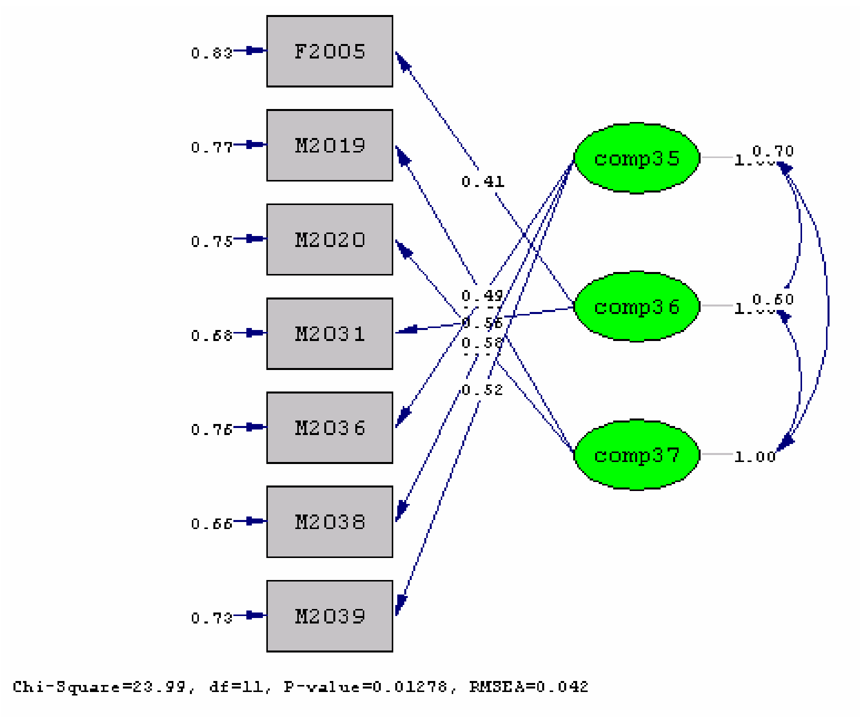
[35] Même si ce seuil revêt un caractère arbitraire, l'analyse serait peu pertinente si tous les liens entre items étaient examinés en détail. En effet, dans un grand nombre de cas, ces liens sont, soit non significatifs, soit très faibles, et il est alors difficile de commenter et de donner un sens à ces constatations.

[36] LISREL : LInear Structurel RELationship

[37] Dans cet item, les élèves doivent souligner des mots d'une liste qui commencent par la lettre « b » et qui se terminent par la lettre « a » et on peut s'interroger sur la pertinence de la définition de la compétence visée pour cet item, à savoir : « *savoir appliquer les consignes courantes du travail scolaire* ».

mathématiques. Une deuxième compétence (comp36) réunit l'item 5 de français et l'item 31 de mathématiques. Enfin, une troisième variable latente (comp37) rend compte d'une compétence réunissant les items 19 et 20 de mathématiques.

Trois compétences sont donc isolées mesurant des aspects différents des apprentissages des élèves. La première concerne la mesure d'une unité de temps (comp35) alors que la seconde cible le repérage dans le temps (comp37). Mais c'est la troisième (comp36) qui nous intéresse particulièrement dans la mesure où elle permet de saisir l'intérêt de notre approche statistique. En effet, cette compétence réunit deux items qui correspondent à des situations différentes. Le premier étant un item de français mesurant la capacité des élèves à discriminer des lettres, le second étant un item de mathématiques mesurant la capacité à lire et comprendre un emploi du temps simple d'une journée. En fait, ces deux items viseraient bien une même compétence en matière de compréhension simple, et même plus précisément en matière de capacités attentionnelles (Morlaix, Suchaut, 2007).



Graphique 1 : Exemple d'analyse en variables latentes (CE2)

Les analyses ont permis d'identifier ainsi 63 variables latentes conduisant ainsi à une recomposition des compétences des élèves à l'entrée au CE2. Parmi les 63 variables mises à jour, 27 d'entre elles (soit 43%) correspondent, souvent de façon partielle, à des regroupements d'items déjà présents dans les évaluations nationales. La correspondance entre les compétences des épreuves et les variables latentes est néanmoins très imparfaite puisque seules 5 variables correspondent exactement à des compétences figurant dans les évaluations nationales (il s'agit uniquement d'exercices de mathématiques).

II. L'importance des compétences en mathématiques dans la scolarité primaire

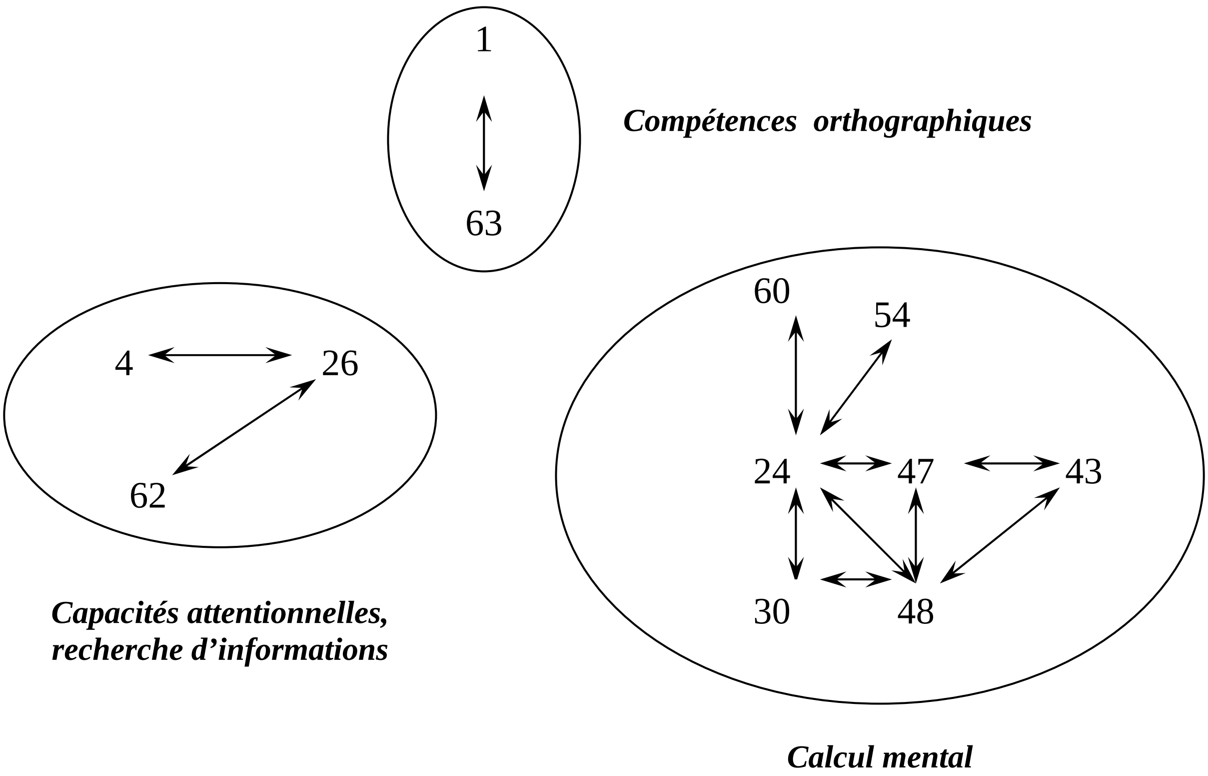
L'étude des relations entre les différentes variables latentes doit permettre de savoir quelles compétences rendent le mieux compte des acquisitions globales des élèves et quelle est la place réservée aux mathématiques dans les apprentissages. Dans une première étape, nous avons analysé la matrice de corrélations entre les différentes variables latentes et nous avons sélectionné les corrélations les plus importantes (supérieures à +0,70). Cela a permis de dégager trois grands groupes de compétences qui sont représentées sur le graphique 2 (les chiffres correspondent aux numéros associés aux variables latentes).

Un premier ensemble est composé des variables « *comp1* » et « *comp63* ». Il s'agit ici clairement de compétences orthographiques qui sont mesurées avec ces deux variables. En effet, la presque totalité des items rendant compte de ces variables latentes concernent deux exercices de dictée.

Le deuxième ensemble regroupe les variables « *comp4* », « *comp26* » et « *comp62* ». Cet ensemble d'apparence disparate prend sens quand on l'examine sous l'angle de la psychologie cognitive[38]. Autant les items de français que ceux de mathématiques présents dans ce regroupement évaluent la capacité que peuvent avoir les élèves à rechercher de l'information plus ou moins complexe à partir de supports divers (textes, mots, calendriers, emplois du temps, plans, énoncés de problème). Ce sont donc les capacités attentionnelles des élèves qui sont mises à contribution pour la maîtrise de cette compétence globale. Le troisième ensemble regroupe sept variables latentes. Le lien commun entre ces variables est également clair puisque les items de calcul mental interviennent systématiquement pour chacune d'entre elles.

Les acquisitions des élèves à l'entrée au CE2 s'organisent principalement autour de ces trois compétences qui ne sont pas de même nature. Si l'acquisition des compétences orthographiques dépend principalement d'un enseignement systématique, les deux autres compétences sont davantage associées à des processus plus complexes qui interviennent de façon transversale dans de nombreuses situations d'apprentissage. On devrait s'attendre à ce que ces compétences majeures contribuent fortement à l'explication des différences de réussite entre élèves à l'entrée au CE2. Pour vérifier cela, une régression « pas à pas » a été estimée avec comme variable dépendante le score global moyen de CE2 et comme variables explicatives les compétences mises à jour précédemment (Morlaix, Suchaut, 2007).

[38] Des collègues psychologues du LEAD (Laboratoire d'Etude de l'Apprentissage et du Développement - Université de Bourgogne), Pierre Barrouillet et Valérie Camos, ont été associés à cette partie de la recherche, ils ont notamment contribué à donner une signification à certaines variables latentes identifiées par les modèles LISREL



Graphique 2 : Ensembles de compétences des évaluations de CE2

Les 3 compétences les plus prédictives (« *comp48* », « *comp4* », « *comp63* ») appartiennent chacune à un des groupes identifiés auparavant. Ces trois compétences expliquent à elles seules 82% de la variance du score global. Cette analyse de la prédictivité montre que certaines compétences sont bien au cœur des acquisitions des élèves à l'entrée au CE2. Les habiletés en calcul mental, la capacité à retrouver rapidement des informations dans des supports variés, la maîtrise de l'orthographe structurent ainsi fortement les résultats des élèves au début du cycle 3. Le calcul mental occupe une place centrale puisqu'une seule compétence de (« *comp48* ») explique à elle seule près de 60% de la variance du niveau global de CE2. Autrement dit, les différences d'habileté en calcul mental expliquent fortement les écarts de scores entre élèves au début du CE2.

Pour compléter nos constatations sur la question d'interdépendance entre compétences, nous avons examiné comment les compétences les plus prédictives se hiérarchisent entre elles[39]. Il s'agit concrètement de relever quel pourcentage d'élèves peut maîtriser une compétence sans en maîtriser une autre. On obtient alors une hiérarchie des compétences avec à son sommet la compétence qui ne peut être acquise sans maîtriser les compétences qui lui succèdent dans cette hiérarchie. A l'inverse, la compétence en fin de classement est celle dont la maîtrise est absolument nécessaire pour l'acquisition des compétences qui lui sont supérieures dans cette même hiérarchie. Les analyses montrent que très peu d'élèves peuvent maîtriser correctement

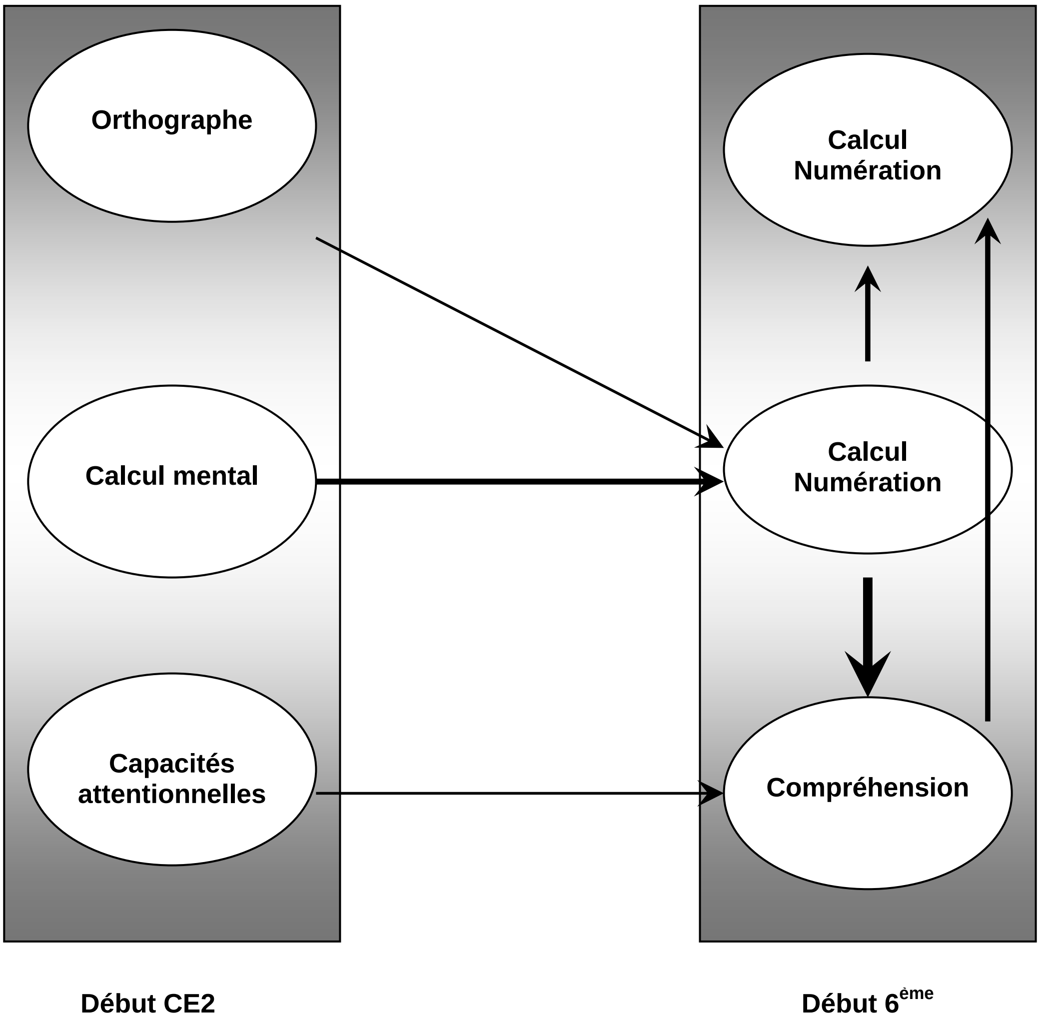
[39] Une étape préalable à l'analyse est de rendre compte systématiquement de la maîtrise ou de l'échec à une compétence, ce qui suppose une transformation de l'échelle de mesure, on passe alors d'une échelle d'intervalle (qui varie selon la compétence considérée) à une échelle standardisée, puis à une échelle nominale dichotomique : échec ou réussite. Il se pose alors la question du seuil à partir duquel on va considérer que l'élève a acquis la compétence visée ; il n'existe pas de réponse parfaite mais nous avons retenu le critère habituel, c'est-à-dire qu'un score supérieur à 75% de réussite est associé à la maîtrise de la compétence.

la technique opératoire de la soustraction sans maîtriser les autres compétences. Ceci signifie que l'acquisition de la soustraction est un processus qui nécessite de la part des élèves diverses capacités et habiletés préalables. La compétence qui se situe au plus bas niveau de cette structure hiérarchique correspond à des items évaluant la compréhension de consignes simples, soit ce que nous avons préalablement dénommé capacités attentionnelles. Cette structure pyramidale des compétences, qui confirme bien le fait trivial que certains apprentissages ne peuvent se réaliser que si d'autres sont déjà maîtrisés (Bloom, 1979), peut fournir des indications didactiques et pédagogiques pour l'enseignement au cycle 2. Ces indications concernent principalement les contenus d'enseignement et leur programmation dans le temps, ils s'appuient sur le double constat suivant établi à l'entrée du CE2 : certaines compétences sont difficilement accessibles à l'ensemble des élèves, certaines compétences sont essentielles à l'acquisition d'autres compétences.

Une question importante est à présent la mise en relation des compétences et leur évolution dans le temps. Pour cela, le même travail qu'au CE2 a été réalisé sur les évaluations de début $6^{ème}$ sur les mêmes cohortes d'élèves. A l'entrée en $6^{ème}$, les analyses statistiques livrent une configuration présentant trois regroupements de variables latentes ; un premier ensemble est représenté par une seule compétence initiale. Celle-ci rend compte de connaissances en numération et d'habiletés en calcul. Pour réussir la grande majorité des items de ce regroupement, les élèves doivent être capables d'effectuer des calculs assez complexes pour ce niveau d'enseignement, puisque ceux-ci peuvent concerner des durées ou des nombres décimaux. Une bonne connaissance de la numération est également requise avec la comparaison de nombres décimaux ou de grands nombres. Le deuxième regroupement se réfère lui aussi à une seule variable latente qui semble en fait assez proche du regroupement précédent. Ce sont surtout des connaissances en numération et des habiletés en calcul qui seraient mobilisées. Comme en CE2, un troisième regroupement comporte un grand nombre de variables latentes. En observant le contenu des items concernés, on remarque que la compréhension est la dimension la plus présente mais figurent également des compétences en géométrie (construction de figures, évaluation d'aires…) et en orthographe. En résumé, au début, comme à la fin du cycle 3, il semble que des ensembles de compétences se détachent nettement en calcul, numération et compréhension (ce dernier domaine étant évalué dans des contextes variés, en français comme en mathématiques). Les compétences orthographiques ne peuvent, quant à elles, être distinguées qu'à l'entrée au CE2.

Dans une logique d'analyse longitudinale, à présent, un modèle d'équations structurelles a permis de mettre en évidence les relations entre les regroupements de compétences des deux niveaux scolaires (graphique suivant). Les flèches qui figurent sur le graphique ont des épaisseurs variables en fonction de l'intensité de la relation qui lie les différents ensembles de compétences. Une première observation est l'absence de flèches entre les ensembles de compétences de CE2, cela ne signifie pas que ces ensembles sont statistiquement indépendants, mais qu'ils entretiennent des relations plus fortes avec les acquis de $6^{ème}$. On peut ensuite remarquer des liaisons attendues entre compétences de même nature ; il existe ainsi une relation forte entre les compétences en calcul mental évaluées au CE2 et celles de calcul-numération mesurées à l'entrée en $6^{ème}$. De la même manière, les compétences en compréhension en fin de cycle 3 dépendent des capacités attentionnelles évaluées à l'entrée en CE2.

L'information la plus importante pour saisir le processus d'évolution des acquisitions des élèves au cours du cycle 3 est la place centrale accordée aux habiletés en calculs numériques. En effet, les compétences des élèves à l'entrée en $6^{ème}$ se rapportant à ce domaine sont en premier lieu fortement déterminées par les compétences en calcul mental évaluées trois années auparavant. En second lieu, ces habiletés numériques entretiennent de forts liens avec les performances dans le domaine de la compréhension à la fin du cycle 3. Ceci est fondamental dans la mesure où ces compétences en compréhension se révèlent être les dimensions les plus prédictives du niveau global des élèves à l'entrée en 6ème. Le classement des compétences les plus prédictives fait en effet apparaître qu'une variable mesurant la compréhension (en français et en mathématiques) explique à elle seule plus des trois-quarts des écarts des scores entre les élèves à la fin du cycle 3. En résumé, l'accès au collège se fera d'autant mieux que les élèves auront développé, et ceci dès la fin du cycle 2, des habiletés élevées en calcul en général et plus particulièrement en calcul mental.



Graphique 3 : Relations entre les ensembles de compétences du cycle 3

Des analyses menées à partir du panel 1997 permettent de compléter notre vision de la dynamique des apprentissages à l'école primaire. Les évaluations effectuées à l'entrée au CP sur la cohorte des élèves du panel permettent d'avoir des informations sur le niveau de compétences des jeunes élèves dans les domaines suivants : connaissances générales, connaissance de l'écrit, lecture tâches phonologiques, lecture morphologie et syntaxe, compétences épreuves numériques, concepts liés au temps, compréhension orale, compétences d'écriture, concepts liés à l'espace, compétences de pré-lecture, nombre et figures géométriques, culture technique.

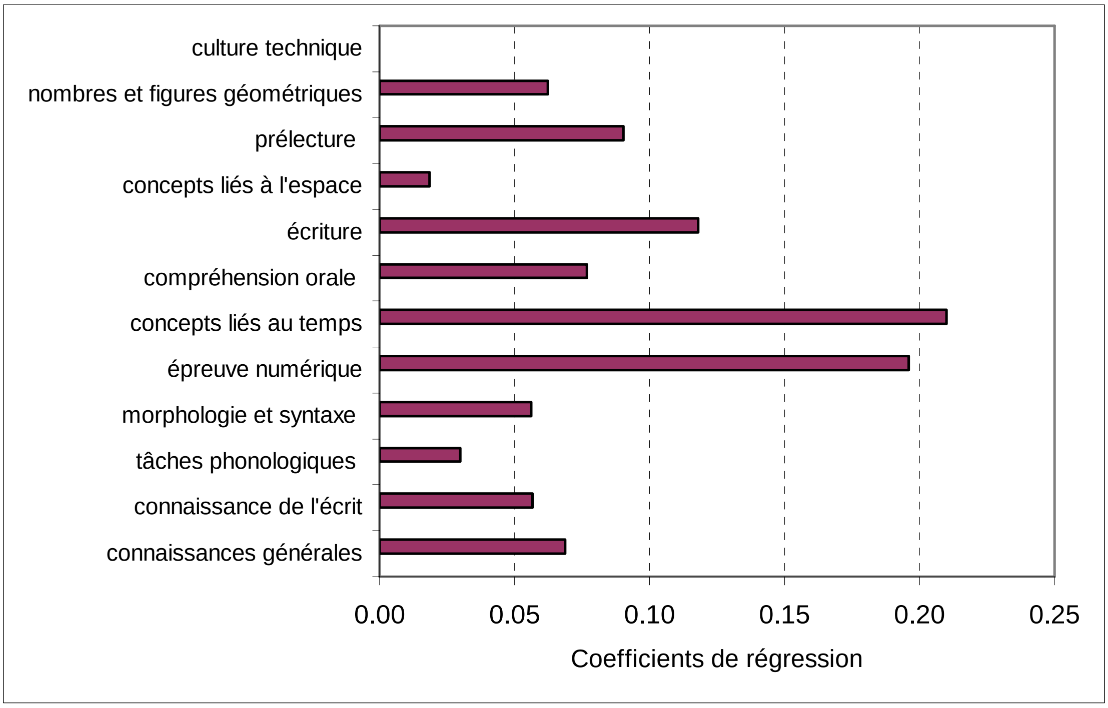
La question est de savoir, parmi ces différents éléments, ceux qui prédisent le plus la réussite ultérieure, soit 5 années plus tard à l'entrée en 6ème. Le tableau suivant présente les estimations d'un modèle de régression expliquant la variance du score global (français et mathématiques) des évaluations de début 6ème en fonction des différentes dimensions de l'évaluation de début CP. Le graphique 4 permet de comparer plus aisément le poids de chacun des domaines des acquisitions à l'entrée au CP sur la réussite en fin d'école primaire.

Tableau 3 : Modèle analysant la variance du score de 6ème en fonction des différentes dimensions de l'évaluation de début CP

	coefficients standardisés	sign.
Score connaissances générales	+0,07	***
Score connaissance de l'écrit	+0,06	***
Score lecture tâches phonologiques	+0,03	**
Scores lecture morphologie et syntaxe	+0,06	***
Score compétences épreuves numériques	+0,20	***
Scores concepts liés au temps	+0,21	***
Score compréhension orale	+0,08	***
Scores compétences d'écriture	+0,12	***
Scores concepts liés à l'espace	+0,02	*
Scores compétences de prélecture	+0,09	***
Scores nombre et figures géométriques	+0,06	***
Score culture technique	-0,01	ns
Constante	7,91	
Pourcentage de variance expliquée	41,9%	

n.s. : non significatif, * : significatif au seuil de 10%, ** : significatif au seuil de 5%,

*** : significatif au seuil de 1%.



Graphique 4 : Effets des différentes dimensions de l'évaluation de début CP sur le score global de l'évaluation 6ème

Les coefficients standardisés permettent de comparer directement les impacts des différents scores sur le score global de 6ème. Deux dimensions semblent particulièrement prédictives de la réussite à l'entrée en 6ème, il s'agit des concepts liés au temps (coefficient de +0,21) et des compétences aux épreuves numériques (coefficient de +0,20). Les autres dimensions affichent des coefficients plus modestes (de 0,06 à 0,12) alors que deux dimensions apparaissent comme presque (concepts liés à l'espace) ou totalement (culture technique) indépendantes du niveau global de compétences à l'entrée en 6ème. Les acquis des élèves développés avant l'école élémentaire n'ont donc pas tous le même poids et certains apparaissent, plus que d'autres, jouer un rôle déterminant dans la réussite ultérieure. C'est donc le cas pour les concepts liés au temps et les compétences numériques, ces deux dimensions expliquant à elles seules plus de 35% de la variance du score global à l'entrée au collège. Ce résultat est à nos yeux de toute importance dans la mesure où l'on peut s'interroger sur les conditions qui ont permis aux élèves, à l'école maternelle, de développer des compétences dans ces deux domaines essentiels. On insistera bien sûr, au regard de la thématique de ce texte, sur la place faite aux compétences dans le domaine numérique.

Les analyses en variables latentes montrent que les acquisitions des élèves se structurent principalement en fonction de trois blocs de compétences. Le premier a trait aux compétences dans le domaine de la langue (compréhension orale, tâches phonologiques, morphologie-syntaxe, écriture) ainsi que les concepts liés au temps. Ce premier ensemble regroupe donc en très grande majorité des compétences en lecture-écriture. Un deuxième bloc regroupe les concepts liés à l'espace et les compétences en culture technique. Les exercices d'évaluation relatifs à ces deux dimensions font appel à la connaissance de notions de vocabulaire, d'objets et de situation liées à la vie courante. Un troisième et dernier bloc regroupe les compétences qui ont trait à la connaissance du nombre, aux activités numériques et à la géométrie. On identifie donc clairement un ensemble de compétences en mathématiques qui se distinguent des autres. D'ailleurs, les corrélations entre les différentes dimensions des apprentissages sont nettement plus faibles que celles observées aux autres niveaux scolaires étudiés (début et fin du cycle 3).

Conclusion

Deux idées principales de dégagent de ce texte. La première est que les apprentissages des élèves ne peuvent s'apprécier de manière statique. Le fonctionnement de l'école a pourtant tendance à cloisonner ces apprentissages : découpage des programmes en année scolaire ou en cycle et entre disciplines ; cela donne en fait une image artificielle qui ne correspond pas à l'activité réelle de l'enfant. C'est aussi le cas dans les épreuves des évaluations nationales dans lesquelles les compétences sont réparties entre disciplines et entre champs. Les analyses exposées précédemment mettent en évidence un lien entre les compétences mobilisées par les élèves au cours de leur scolarité élémentaire et cela nous incite à insister sur l'aspect transversal des acquisitions. La seconde idée est que certaines compétences sont véritablement au cœur des apprentissages et que leur maîtrise est indispensable à la réussite scolaire. Certaines compétences en mathématiques, et principalement les habiletés en calcul mental sont fortement explicatives du niveau global d'acquisition des élèves et de son évolution au fil des années. Ce résultat est d'autant plus important que ces mêmes habiletés sont corrélées également aux capacités cognitives des élèves et notamment à la mémoire de travail (Barrouillet, Camos, Morlaix, Suchaut, 2007), cette proximité entre calcul mental et mémoire de travail n'étant pas surprenante car les activités scolaires de cette nature font « naturellement » appel à cet aspect des capacités cognitives (McLean, Hitch, 1999). A ce titre, la pratique d'activités systématiques et variées dans le domaine du calcul mental ne sont sans doute pas à négliger, ce qui pourrait permettre de réduire le coût cognitif des activités d'apprentissage en automatisant certains processus.

Il est alors essentiel de se pencher sur les compétences qui pourraient être développées assez précocement pour permettre aux élèves les moins armés sur le plan cognitif et les plus défavorisés sur le plan social de compenser leur désavantage. Ici encore, les mathématiques, et plus particulièrement les acquisitions réalisées dans les activités numériques avant l'école primaire sont des bons prédicteurs de la réussite ultérieure. Il reste à définir les situations pédagogiques et les activités qui y sont associées qui permettent de développer ces compétences en mathématiques. Celles-ci peuvent très bien prendre une forme ludique tout en permettant de travailler des mécanismes cognitifs fondamentaux car il s'agit bien de cela quand on parle d'activités numériques.

Bibliographie

Aish-Van Vaerenbergh, AM.(1997), Modèles statistiques et inférences causales : analyse de structures de covariances avec LISREL . In *Faut-il chercher aux causes une raison ? L'explication causale en sciences humaines.* Aish-Van Vaerenbergh, AM. et al. Librairie philosophique Vrin, pp106-130.

Barrouillet P., Camos V., Morlaix S., Suchaut B. (2007). Compétences scolaires, capacités cognitives et origine sociale : quels liens à l'école élémentaire ? Article soumis à la *Revue française de pédagogie*.

Bloom, B.S. (1979) *Caractéristiques individuelles et apprentissages scolaires*, Bruxelles, Labor, Paris, Nathan.

Crahay M. (2006), Dangers, incertitudes et incomplétude de la logique de la compétence en éducation. *Revue française de pédagogie*, N°154, pp. 97-110.

Demeuse M. Henry G (2004), La théorie classique des tests, in Demeuse M. (2004), *Introduction aux théories et aux méthodes de la mesure en sciences psychologiques et en sciences de l'éducation*. Les Editions de l'université de Liège.

De Ketele J.M., Gerard F.M. (2005), La validation des épreuves d'évaluation selon l'approche par les compétences, *Mesure et Évaluation en Éducation*, À paraître.

McLean, J.F., Hitch, G.J. (1999), "Working memory impairments in children with specific arithmetic learning difficulties", *Journal of Experimental Child Psychology, 74*, 240-260.

Morlaix S., Suchaut B. (2007), *Évolution et structure des compétences des élèves à l'école élémentaire et au collège : une analyse empirique des évaluations nationales*. Les cahiers de l'Irédu, N°68, mai 2007, 259 p.

Table ronde

I. L’enseignement des mathématiques dans les pays scandinaves

Rémy JOST, inspecteur général de l’Éducation nationale, groupe des mathématiques

Pratiques pédagogiques et exemples d’exercices de mathématiques à l’école obligatoire

Principaux constats

1. Une école qui développe le sens de l’initiative.
2. Une école qui reconnaît le rôle et la place des mathématiques.
3. Une école qui a développé une culture de l’évaluation.

Une école qui donne des initiatives aux jeunes,

Une école qui encourage l’autonomie et valorise l’initiative dès le plus jeune âge :

- l’élève a le temps de chercher, il est placé en situation de réussite au cours des activités mathématiques ;
- le plaisir de chercher est encouragé : des jeux logiques et ludiques, individuels ou par équipes, sont proposés à tous les niveaux (les enseignants y sont formés) ;
- l’élève ne demande de l’aide que quand il en ressent le besoin ; il n’a pas peur de se tromper ;
- le redoublement n’existe pas durant toute l’école obligatoire : l’élève connaît bien son maître, souvent il le « garde » pendant quelques années ;
- l’élève prend volontiers la parole en classe : il s’exprime sans appréhension, il est régulièrement invité à expliquer ce qu’il a compris, à ses camarades, au maître.

Une école qui reconnaît le rôle des mathématiques, leur place dans la société, dans l’enseignement

Dans la formation des enseignants, lors de la préparation des cours, trois questions sont posées de façon permanente :

- **Pourquoi apprendre des mathématiques ?**
- **Quelles mathématiques enseigner ?**
- **Où sont les mathématiques dans la vie quotidienne de l’élève ?**

La première question du « pourquoi apprendre des mathématiques ? » est bien différente de la question : « à quoi servent-elles ? ». Elle renvoie à l’histoire des mathématiques, à leur contribution à la formation de la pensée, à leur place dans la société, aux attitudes développées, au plaisir de chercher, de jouer…

Concernant la deuxième question, l’équipe de professeurs de chaque école construit son programme de mathématiques et la progression sur plusieurs années à partir d’un curriculum ministériel très sobre. Le cours reste bref, les exercices supposent des connaissances mathématiques modestes mais bien ancrées, et une bonne aptitude à les mobiliser dans des problèmes. Pour répondre à cette ambition, les exercices proposés sont aussi de type « traditionnel » et on n'hésite pas à demander de réciter des éléments de tables, à faire faire des calculs systématiques…

La troisième question manifeste le souci permanent de rendre les mathématiques visibles. Cette question est formatrice pour tous les enseignants comme pour les élèves. Elle « oblige » à penser autrement l'enseignement des mathématiques, à proposer des exercices de type concret. Elle « oblige » à chercher et à montrer où sont les mathématiques dans notre société.
Elle permet ensuite à l'élève de « voir » de lui-même des mathématiques à l'extérieur de l'école. Dans les devoirs d'évaluation il y a toujours des exercices de mathématiques issus de problèmes de la vie courante.

Une culture de l'évaluation des résultats, une volonté d'améliorer les acquis des élèves, à tous les niveaux de l'éducation.

Ce qui se traduit pour les enseignants de mathématiques par deux questions-clefs :

- **Qu'est ce que les élèves ont appris ?**
- **Comment faire mieux ?**

La première question

- **Qu'est ce que les élèves ont appris ?**

  Cette question concerne tous les enseignants, qui bâtissent les grilles de références et de notation des élèves (deux ou trois appréciations sont proposées : très satisfaisant, satisfaisant, acceptable). Cette question amène à
  - n'évaluer l'élève que lorsqu'il est prêt ;
  - associer chaque élève à l'évaluation de ses compétences.

  Des évaluations nationales type PISA sont envoyées chaque année dans des établissements faisant partie d'un échantillon représentatif, les résultats sont envoyés à l'école et des synthèses anonymes sont aussi rendues publiques. Les communes peuvent aussi faire la demande d'une évaluation pour leur(s) école(s) si elle ne fait pas partie de l'échantillon. Le corps des inspecteurs a été supprimé en 1990.

La deuxième question

- **Comment faire mieux ?**

  Les élèves en difficulté sont pris en charge de façon individualisée afin qu'ils réussissent à atteindre au moins le niveau de compétences « acceptable ».
  Les enseignants peuvent se retrouver en équipe pour mettre au point, pour améliorer des séquences précises d'apprentissage, en particulier, celles qui sont délicates à mettre en œuvre. Ils sont responsables de la formation et de la réussite de tous leurs élèves.

En conclusion

Durant toute la scolarité obligatoire de l'enfant, les mathématiques font partie de sa formation intellectuelle, personnelle et culturelle de façon variée, par des exercices techniques d'entraînement et de mémorisation, par le jeu, par les manipulations d'objets, par la résolution de problèmes issus de la vie courante, par l'histoire des nombres, des découvertes…
Les mathématiques ne sont pas seulement une science parmi les autres sciences ou au service des autres sciences. Progressivement, elles deviennent un outil de compréhension du monde actuel, une aide à l'action, à la décision. Les enseignants de mathématiques sont conscients qu'elles développent d'autres formes de langage, qu'elles apprennent à raisonner, qu'elles apprennent à résoudre des situations-problèmes que l'élève rencontrera tout au long de sa vie[40].

II. L'état de l'enseignement primaire des Mathématiques en Italie : de l'apprentissage des *Tabelline* (tables de multiplication) à la certification des compétences

AnnaMaria Gilberti, inspectrice du Ministère de l'Instruction Publique Italienne

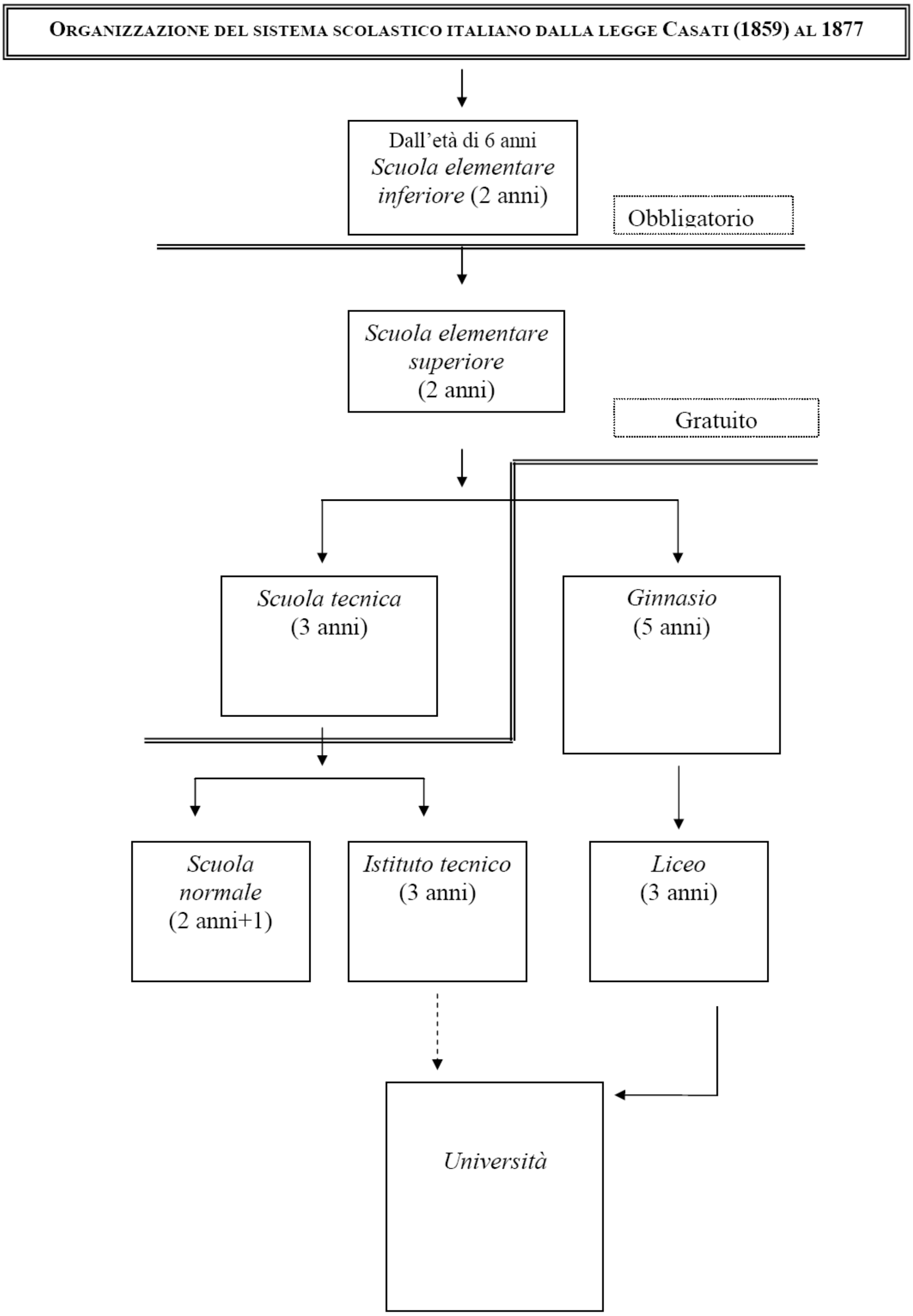
Ministero della Pubblica Istruzione
Ufficio Scolastico per la Lombardia
Servizi per la valutazione

- L'évolution du contexte socioculturel et institutionnel de l'école italienne.
- Les principales caractéristiques du cycle primaire par rapport aux mathématiques telles qu'elles sont considérées par le curriculum mis au point par le Ministère.
- Le passage de l'évaluation des apprentissages à la certification des compétences au sein des mathématiques.
- Quelques exemples de tests tirés aussi bien du Système national d'évaluation (SNV) que du groupe de recherche régional et de Mathématiques sans frontières junior.
- Bibliographie et sitographie

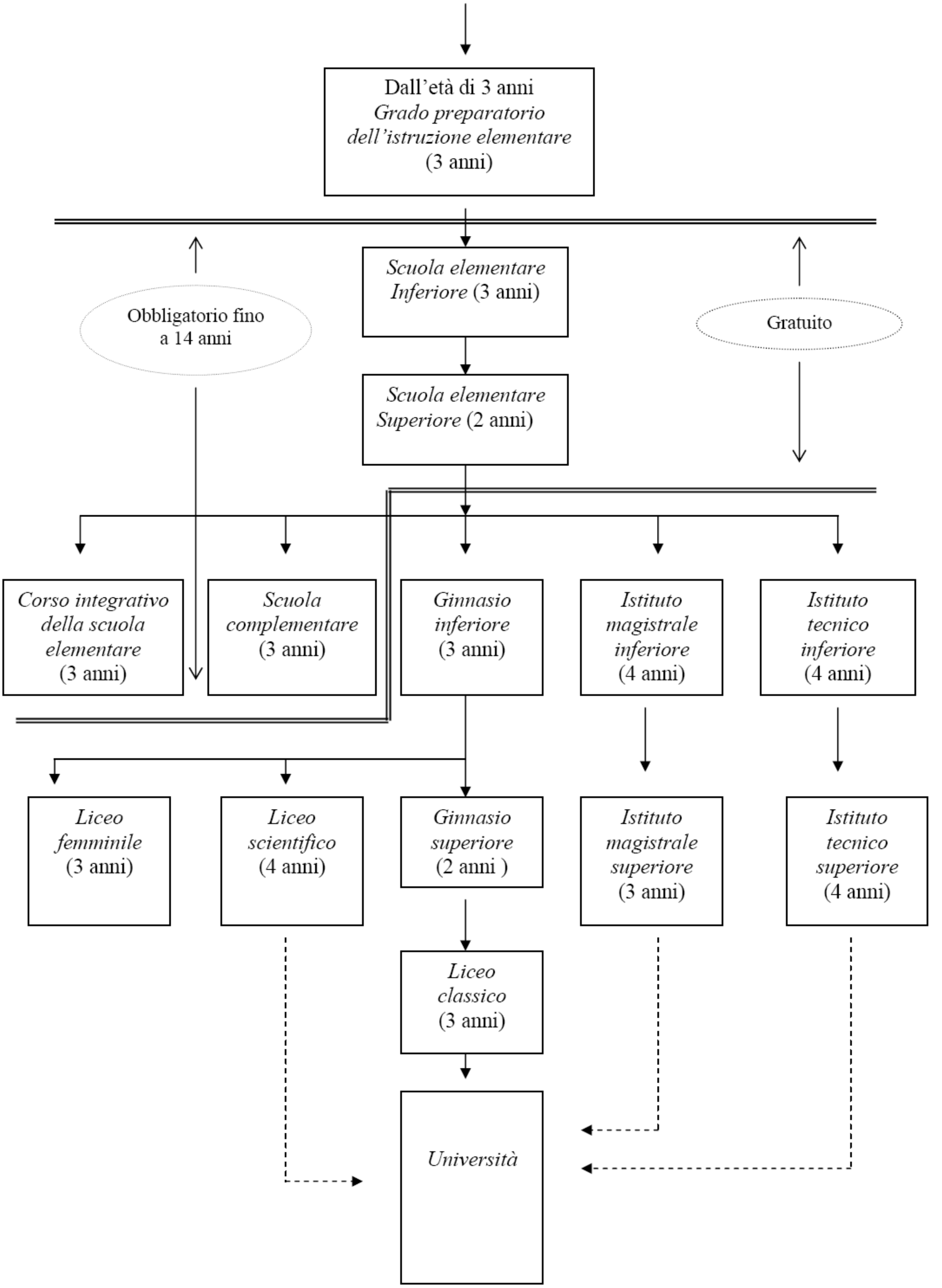
[40] Annexe 2 : exemples d'exercices en Finlande, page 183
Annexe 3 : objectifs généraux d'enseignement et critères d'évaluation dans une école de Finlande, page 187

L’évolution du contexte socioculturel et institutionnel de l’école italienne

La situation de la formation en Italie évolue constamment dans la tentative de parvenir à formuler une réforme institutionnelle qui a demandé et demande un certain temps.

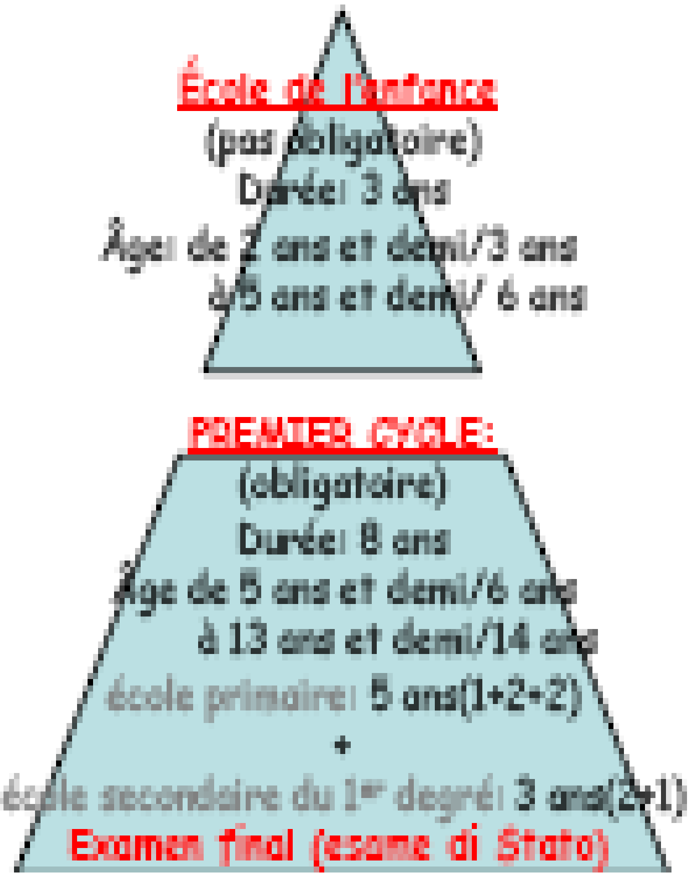


ORGANIZZAZIONE DEL SISTEMA SCOLASTICO ITALIANO DALLA RIFORMA GENTILE (1923) AL 1945



En ce qui concerne les mathématiques notamment, il faut considérer quelques étapes fondamentales :

DATE	ETAPE	CRITERES SOUS-JACENTS
Loi Coppino 1877 ↓ 1888	Scolarité obligatoire. Programme école primaire.	Présence des mathématiques. Apprentissage innovant alimenté par le slogan « faire un cours avec des choses concrètes ».
Torino, 9-14/9/98	I° Congrès Mathesis	Uniformité dans la langue et dans les notations des mathématiques élementaires (E.De Amicis).
1928	Règlement de l'école primaire.	
1977	Abolition des examens de repêchage (école primaire).	Introduction du concept de curriculum vertical sur la base d'un apprentissage progressif fondé essentiellement sur les aspects syntaxiques (contenus).
Loi n° 148/1990	Mise à jour du règlement de l'école primaire, dont les programmes ont été anticipés dès 1985.	Présentation des thèmes organisés par objectifs : • problèmes ; • arithmétique ; • géométrie et mesure ; • logique ; • probabilité, statistique, informatique.
2001	Programmes mis au point par les soins de l'Union des Mathématiques Italiennes (UMI)	Récupération de la signification d'objets mathématiques. Noyaux devant être considérés comme : - contenu ; - procédé. On met en évidence la possibilité d'appliquer une stratégie alternative lors de la solution d'un problème. Le problème, en tant que tel, acquiert davantage d'importance, car il faut l'entendre comme occasion déclenchant des conjectures de plus en plus complexes.
Loi n° 53/2003	Le nouveau système d'instruction et de formation.	
- Loi n° 296 7/12/2006, art, 1, comma 622., lettera MPI 30/7/07 - D.M. n° 68/ 31/07/07	- Le règlement pour l'instruction obligatoire. - Les indications nationales pour l'école du premier cycle.	V. éléments successifs.



Éducation préscolaire
École maternelle : 3-6 ans
La crèche est disponible pour les enfants jusqu'à l'âge de 3 ans. Ensuite, les enfants peuvent fréquenter la maternelle qui constitue le premier niveau du système scolaire. La maternelle est gratuite et l'inscription initiale est ouverte à tous les enfants ayant atteint l'âge de 3 ans au plus tard le 30 avril de l'année scolaire en cours.

Instruction obligatoire
Sur la base de la Constitution, l'instruction est obligatoire jusqu'à 14 ans. Toutefois, un récent décret ministériel du mois d'août 2007 prévoit la scolarité obligatoire d'une durée de 10 ans et le droit et le devoir de s'instruire et de continuer la formation même professionnelle (durée pour les deux de 12 ans) ou, du moins, jusqu'à une qualification professionnelle.
Premier cycle de l'instruction (durée 5+3 = 8 ans) **(Enseignement obligatoire)**
École primaire : 6-11 ans
École secondaire du premier degré : 11-14 ans
Second cycle de l'instruction (gestion par les soins de l'État)
École secondaire du deuxième degré : 14-19 ans (durée de 5 ans pour toutes les filières qui s'achèvent par le baccalauréat, sauf pour l'instruction professionnelle qui prévoit une qualification après les trois premières années de cours).
Cycle de formation professionnelle (gestion par les soins de la Région) :
de deux à trois ans après le premier cycle d'instruction.

Les principales caractéristiques du cycle primaire par rapport aux mathématiques telles qu'elles sont considérées par le curriculum actuel mis au point par le ministère

Examinons maintenant les détails de la Réforme…

Voici la table de multiplication reproduite sur tous les cahiers de 1958. Elle représentait pour les élèves la façon la plus immédiate d'apprendre par cœur le concept de multiplication. Peut-on calculer d'une manière aussi efficace les multiplications tout en se focalisant uniquement sur quelques-unes ?

TAVOLA PITAGORICA

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Il est évident que cette table de multiplication est redondante. Beaucoup d'informations sont deux fois répétées et d'autres ne sont pas nécessaires.

Quand l'on compare les compétences en mathématiques des différents élèves dans le monde entier, les Chinois, ceux de Taiwan et Singapour arrivent nettement en tête des classements.

On n'oblige pas les enfants à apprendre la table de multiplication jusqu'à neuf x neuf.

Tout d'abord, les enfants ne doivent pas apprendre la table de multiplication de *un*.

Par la suite, ils n'apprennent pas 3x5 et 5x3.

Ils apprennent 5x3 de la table de multiplication du *trois*, mais celle du *cinq* commence par 5x5, qui, évidemment, n'entre pas dans la table de *deux, trois et quatre*.

Cette méthode réduit non seulement le poids mnémonique de 81 à 36 données, mais elle sollicite également l'élève à comprendre que 3x5 et 5x3 sont équivalents.

Ce raisonnement a été confirmé par Michel Fayol dans son intervention, relativement à l'interférence entre les différentes opérations mentales, survenant à l'occasion des tables de multiplication.

La présentation des récentes Indications nationales ministérielles italiennes adressées aux écoles du premier cycle a été diffusée par la presse avec le slogan « plus de table de multiplication et plus de grammaire ». Il faut, par contre, mettre en évidence que le ministre insiste, de moins en moins, sur les notions et tend à valoriser de plus en plus les efforts de l'école élémentaire, visant à garantir le succès dans la formation de tous les jeunes ; un succès qui, autrefois, se résumait dans la célèbre phrase « savoir lire, écrire et faire les quatre opérations ».

Récemment, à l'occasion d'une conférence ayant eu lieu à Pecs en Hongrie, sur la Peer Review, j'ai eu l'occasion de me promener en touriste parmi les étalages du centre de Budapest et c'est, avec mon plus grand plaisir, que je suis tombée sur cette Szorzótábla une sorte de boulier-compteur avec la table de multiplication.

Si l’on tourne les cases en bois, au verso, on voit comment l’enfant s’habitue à associer le nombre à l’opérateur pendant qu’il joue.

Le passage de l’évaluation des apprentissages à la certification des compétences au sein des mathématiques

Les mathématiques dans les *Indications nationales pour le premier cycle* font partie du *Domaine Mathématique-Scientifique-Technologique* et elles sont décrites en termes de *poteaux* à la fin de l’école primaire, comme par exemple :

- l’élève développe une attitude positive par rapport aux mathématiques à la suite également de maintes expériences dans des contextes significatifs ;
- il s’oriente sans difficulté dans le calcul écrit et mental avec les nombres naturels ; il est en mesure de comprendre quand il faut avoir recours à une calculette ;
- il représente les formes, les relations et les structures qui se trouvent dans la nature ou qui ont été créées par l’homme en utilisant la règle, le compas, l’équerre ainsi que les instruments de mesure les plus communs ;
- il utilise les représentations les plus adéquates des données et il sait s’en servir dans des situations particulières pour obtenir des informations ; il emploie correctement des expressions telles que « il est plus probable que…. » « il est moins probable que… » ;
- il décrit et classifie les figures sur la base des caractéristiques géométriques et utilise des modèles concrets de différente nature pouvant être construits ou mis au point en collaboration avec ses camarades ;
- il résout les problèmes grâce à des stratégies différentes et il se rend compte qu’ils peuvent être solutionnés de différentes manières ;
- il fait des raisonnements (même s’ils ne sont pas formalisés) et soutient sa thèse, par le biais d’activités menées au laboratoire, de discussions avec les copains et de manipulation de modèles construits avec ses camarades ;

avec l’explicitation des objectifs d’apprentissage à atteindre à la fin de la dernière classe de l’école primaire organisés autour de 4 noyaux :

- les nombres ;
- l’espace et les figures ;
- les relations et les fonctions ;
- les mesures, les données et les prévisions.

Cette documentation ministérielle a accueilli les résultats d’une recherche de la durée de 6 ans menée par l’association Union des Mathématiques Italiennes (UMI). La proposition est axée sur trois habiletés fondamentales :

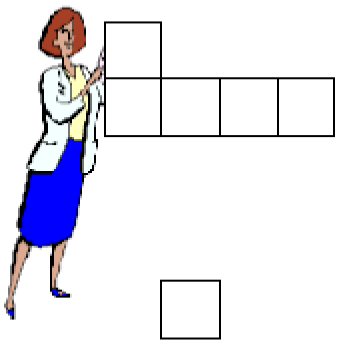
- argumenter et faire des conjectures ;
- mesurer ;
- résoudre et se poser des problèmes.

Quelques exemples de tests tirés aussi bien du système national d’évaluation (SNV) que du groupe de recherche régional et de Mathématiques sans frontières junior

Exemple de la stratégie indiquée en considérant les questions suivantes.

1-Une activité proposée par l’UMI :

Le contexte : représentation de l’espace: figures planes et solides
Consigne : l’institutrice veut construire un cube. Elle a déjà collé 5 carrés en carton de la même dimension et a obtenu l’image indiquée ci-dessous :



Elle doit coller le sixième carré. Pourrais-tu l’aider de façon à ce que l’image, une fois composée, devienne un cube ? Dessine le nouveau développement.
Saurais-tu placer le sixième carré sur une autre côté de l’image pour obtenir encore une fois un cube ?

Pour résoudre le problème, il est nécessaire, non seulement, de connaître le nombre des côtés du cube, mais aussi, de réaliser que le cube doit se fermer, une fois le développement réussi. Le problème peut être résolu de plusieurs façons. La difficulté majeure consiste en la nécessité de comprendre quel est le bon côté permettant de fermer le cube sans plier la feuille, sans pour cela devoir vérifier à chaque fois la pertinence de l’hypothèse faite. Pendant cette activité, l’élève doit se remémorer les expériences déjà vécues dans le même contexte, de façon à reconstruire dans sa tête le processus qui l’amène à plier les différents carrés et, en dernier, à fermer le cube.
Je suis encore une fois d’accord avec ce que Michel Fayol vient d’affirmer et l’on peut penser à un développement de l’exercice d’Alain Mercier.

2- Questions pour la discussion : quelles compétences sont activées ?

Le 9 octobre 2007, à Milan, ma direction a organisé un séminaire (dans un congrès sur l’évaluation des compétences, visant à aider les établissements à réfléchir sur les procédés) pour les compétences en mathématiques où l’on a invité les enseignants à comparer leurs méthodes.
On va prendre en considération un exercice pouvant être résolu à trois niveaux différents, conformément au cycle fréquenté (fin de l’école primaire, fin du premier cycle de l’enseignement secondaire, fin du « biennio » des deux premières années du second cycle) :

Pour l'école secondaire du 1^er^ degré

1. Complète l'affirmation suivante:

Un parallélogramme est un ……………. ayant les propriétés suivantes :

a) les côtés …………….. sont ……………….
b) les angles…………….. sont ……………….
c) les diagonales ……………………..
d) chaque diagonale partage le parallélogramme en deux triangles ………………………

2. Qu'est-ce qu'un parallélogramme?

3. (SNV 2003/04)
Laquelle des affirmations suivantes se rapportant à un parallélogramme est fausse :

a) les côtés opposés sont parallèles ;
b) les diagonales sont égales ;
c) les angles opposés sont égaux ;
d) chaque diagonale partage le parallélogramme en deux triangles égaux.

4. Indique pour chacune des propositions suivantes celle qui est vraie et celle qui est fausse. Justifie ta réponse :

a) chaque rectangle est un parallélogramme ;
b) chaque parallélogramme est un rectangle ;
c) chaque rectangle est un carré ;
d) chaque rectangle est un parallélogramme.

Pour l'école primaire

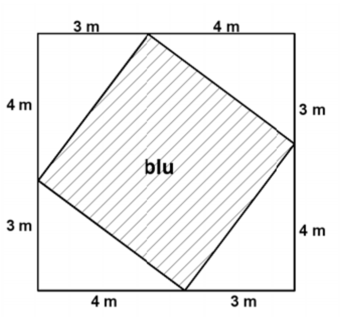
9] Si tu as des petits bâtons qui font 3 cm et 5 cm chacun, tu peux construire deux ou plusieurs parallélogrammes différents.

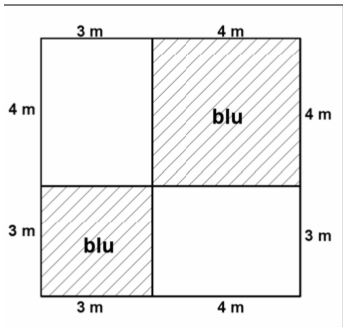
9.1] Est-ce qu'il suffit de donner la mesure de deux côtés consécutifs pour qu'un parallélogramme soit déterminé ?

3-Mathématiques sans frontières junior et les processus mentaux sous-jacents à la solution

Sur la base des résultats obtenus, au cours des trois dernières années en Italie, dans l'école primaire, (pour le second cycle de l'enseignement secondaire, la compétition dure depuis 17 ans et pour le premier cycle, depuis cette année), dans le congrès cité, un autre colloque a eu pour sujet : « *Analyse* a priori *des stratégies devant solutionner les questions de Mathématiques sans frontières* »

Bleu et Blanc
Mario et Jean veulent décorer, avec du vernis bleu, une paroi carrée blanche qui fait 7 mètres de côté. Mario propose la décoration de l'image 1, tandis que Jean celle de l'image 2.
Quelle décoration vaut-il mieux réaliser si l'on veut consommer moins de vernis ? Justifiez votre réponse.





Possibilités :

Élève 1 (procédé pseudo-opérationnel)
Mesure, avec la règle, le côté du carré grand bleu et celui des deux carrés bleus plus petits, afin de calculer l'aire de chaque carré et de pouvoir, par la suite, les comparer.

Elève 2 (procédé numérique)
Calcul des aires par les mesures connues, soustraction de l'aire du carré et leur comparaison successive.

Elève 3 (procédé opérationnel)
Découpage des figures connues, triangles et rectangles, recomposition et comparaison successive avec « le complémentaire » par rapport à la paroi.

Une fois la description terminée, le groupe a été sollicité à réfléchir sur les trois procédés en les classifiant comme ci-dessous indiqué :

- pseudo-opérationnel ;
- numérique ;
- opérationnel.

Les intervenants ont également pris en considération l'importance de l'expression en langue italienne, considérée comme un facteur déterminant lors de la solution d'un problème.
En effet, l'école italienne est de plus en plus concernée par une vague d'immigration comportant la présence de 259 ethnies différentes dans la péninsule, dont 168 à Milan.
Sur la base des réflexions récoltées dans les « Cahiers de recherche didactique »
(professeur Filippo Spagnolo - Université de Palerme), l'on apprend que tout profil linguistique produirait des mathématiques en fonction de sa langue maternelle.
Par exemple, chez les jeunes natifs européens s'exprimant dans une langue néo-latine, il est courant d'avoir recours à des procédés par axiomes (induction mathématique) ; par contre, chez les Chinois, l'approche algébrique est plus facile. Puisque leur langue est principalement caractérisée par des symboles et, en plus, par des symboles associés, la signification de la parenthèse est partie intégrante de leur vision du monde.

C'est dans cette optique d'ouverture vers le monde entier, que je vous remercie de m'avoir invitée à ce colloque et je profite de cette occasion pour annoncer que l'Assemblée internationale de Mathématiques sans frontières aura lieu, en Italie, les 10 et 11 mai 2008.

Je souhaite pour cette date pouvoir présenter des résultats intéressants concernant le rapport entre les langues et les mathématiques.

Réflexion finale visant à faire le point sur la discussion qui a eu lieu pendant le séminaire sur l'importance du problème au sein de l'enseignement

Pour conclure, je pense qu'il est indispensable de promouvoir un enseignement modulaire basé sur les compétences dans une approche qui se veut par problèmes (tout en tenant compte des éléments prédictifs d'insuccès cités par Bruno Suchaut ainsi que les remarques fort intéressantes de Yves Olivier à partir des résultats de l'évaluation internationale PISA).

En ce qui concerne le problème, son rôle demeure crucial, sans pour cela se faire des illusions (v. relation de Alain Mercier). Il est évident que le curriculum ne peut pas se développer en suivant uniquement l'approche par problèmes, sans prévoir des phases de consolidation des compétences de base.

En ce qui concerne la formation des enseignants, je partage les hypothèses de Rémy Jost et j'insiste sur la considération que les professeurs doivent être sollicités non seulement pour définir les compétences à travailler en classe, mais aussi pour les reconnaître lors des performances des apprenants.

À ce propos, il n'est pas inutile de rappeler que la réforme de l'enseignement promue par les Pays-Bas (1984) souligne l'importance pour les élèves d'être conscients, à la fin de leurs études, de ce qu'ils savent, de ce qu'ils savent faire, de ce qu'ils ne savent pas et de ce qu'ils peuvent faire avec ce qu'ils savent.

Pour conclure, pendant ce séminaire, je dois avouer que j'ai reçu énormément de sollicitations en travaillant avec vous et que je rentre en Italie pleine d'idées. Et donc, j'ai appris ! Je vous remercie également de l'accueil qui a été exquis.

Bibliographie et sitographie

AA.VV. "L'educazione matematica", n. 3 – ottobre 1996

Luciana Bazzini, Aldo Scimone, Filippo Spagnolo, "Il mondo dei numeri, teoria e didattica", Palumbo Editore, Palermo 2006

Brian Butterworth, Intelligenza matematica, Rizzoli editore, Bologna 2005

AnnaMaria Gilberti (coordinamento a cura di), "cerca e trova", CD, Milano, settembre 2006

MPI, "Indicazioni nazionali per la scuola del primo ciclo", Roma, agosto 2007

Filippo Spagnolo,"Argomentare e congetturare", Palumbo Editore, Palermo 2005

UMI, "La matematica del cittadino", 2001

Vincenzo Vita, "I programmi di matematica dall'unità d'Italia al 1986", Pitagora editrice, Bologna 1986

www.matematicasenzafrontiere.it

http://math.unipa.it/~grim/ (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche)

http://specchi.mat.unimi.it/ (Mostra interattiva di matematica)

http://www.matematica.it/ (Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica)

III. Ce que l'évaluation internationale PISA 2003 organisée par l'OCDE peut nous apprendre de l'enseignement des mathématiques à l'école et au collège

Yves Olivier, inspecteur d'académie-inspecteur pédagogique régional de mathématiques, Académie d'Orléans-Tours, membre du groupe français des experts en mathématiques de l'évaluation internationale PISA

Résumé :
Partant de quelques situations d'évaluations PISA, j'étudierai les scores (réussites ou échecs) des élèves français et la comparaison avec leurs homologues d'autres pays. Puis, à l'aide de productions des élèves relevées dans les cahiers d'évaluation, je mettrai en lumière les stratégies ou « procédures » utilisées par quelques élèves. Cela permet d'attirer l'attention sur un enseignement faisant acquérir des méthodes stables et efficaces sans être « expertes » qui peuvent ensuite servir comme compétences de base au service de la résolution de quelques problèmes de la vie courante.

Intervention :

1. L'évaluation PISA en trois mots

- ✓ *Qu'est-ce que PISA ?*

Organisée par l'OCDE, cette évaluation vise à connaître la culture des élèves de 15 ans (âge de fin de la scolarité obligatoire dans la plupart des pays) dans trois domaines : la compréhension de l'écrit, la culture mathématique et la culture scientifique. Elles se déroulent tous les trois ans sur un cycle de neuf ans permettant à chacun des domaines d'être une majeure et les autres des mineures. Certains items sont repris lors de chaque évaluation pour faciliter les comparaisons. Le nombre de pays concernés a augmenté régulièrement. En incluant les 30 pays de l'OCDE, le nombre est passé de 32 en 2000, à 42 en 2003 et plus de 60 en 2006.

- ✓ *Quelle culture mathématique ?*

Par culture mathématique, les experts de l'OCDE entendent :
« *l'aptitude d'un individu à identifier et comprendre le rôle des mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques en fonction des exigences de sa vie, en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi* ».
(OCDE, cadre de l'évaluation PISA 2003 :
http://www1.oecd.org/publications/e-book/9603052E.PDF)

✓ *Les modalités de l’évaluation*

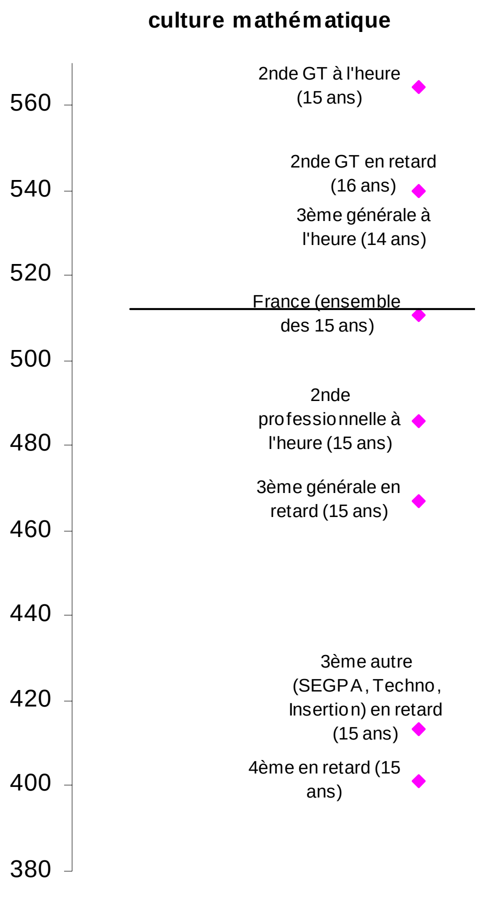
La répartition des 85 items s’est faite en quatre sous-domaines :

- **« Variations et relations »** : Les compétences évaluées sous cet intitulé sont très variées parmi lesquelles : lire, interpréter, exploiter une représentation graphique ; appliquer une relation ; établir une expression algébrique ;
- **« Quantité », nombres et grandeurs** : Les items proposés mettent en jeu la proportionnalité ainsi que des compétences telles que : s'informer, trier en fonction de critères donnés. Ils peuvent aussi faire appel à des méthodes de dénombrement à l’aide, par exemple, d’arbres ;
- **« Espace et formes » :** Le travail demandé repose sur l’interprétation des configurations, sur des calculs d’aires et de périmètres ou l’appréhension de figures de l’espace ;
- **« Incertitude », statistiques et probabilités** : En statistique : les tâches demandées concernent la lecture et/ou l’interprétation de relevés statistiques présentés sous différentes formes, l’utilisation de caractéristiques de position d'une série statistiques, la lecture critique d'une représentation graphique…, et en probabilités : tirages aléatoires, lancers de dés....

Les élèves doivent résoudre des exercices avec des supports étroitement liés à la vie quotidienne (prévisions météo, dés à jouer, télésiège, notes à un examen, etc.), ou mettant en jeu des compétences très variées comme : utiliser un langage et des opérations mathématiques, donner une argumentation mathématique, savoir identifier une question à caractère mathématique, savoir modéliser une situation pour poser un problème mathématique, etc.

2. Les performances des élèves français lors de PISA 2003

Des performances assez moyennes, mais des élèves coupés en deux groupes avec des « retards » qui augmentent et des « écarts » qui se creusent.



Au sein des 30 pays de l’OCDE, la France obtient un score global en culture mathématique significativement au-dessus de la moyenne, se classant au 13ème rang de ce groupe.

Les scores des élèves français sont relativement peu dispersés, mais des écarts de score très significatifs sont observés entre élèves de troisième et ceux de seconde dans tous les domaines.

On considère ici des élèves ayant le même âge, ce qui signifie que les élèves de 15 ans qui sont en troisième ont une « année de retard » par rapport aux élèves de 15 ans qui sont en seconde qui eux sont « à l’heure ».

Une étude comparative (française uniquement) a montré par contre que les élèves de 14 ans en troisième ont un score à peu près identique à celui de leurs aînés de 15 ans en seconde.

On retrouve des écarts de score très significatifs entre filles et garçons[41].

Sur le graphique ci-contre, le score moyen de la France de 511 est à mettre en regard de l'intervalle des scores moyens qui s'étend de 356 à 550 sur l'ensemble des élèves de l'OCDE. Ce score n'est donc pas à assimiler à 511 sur 1000 !

Selon les sous-domaines, la France se situe :

- ***au 10ème rang*** dans le domaine « Variations et relations » *(en étant non significativement différent des pays classés entre le 7ème et le 14ème rang).* Ce sous domaine est certainement le point fort des élèves français. On constate, en particulier, tout comme en 2000, que les items impliquant la lecture directe de graphiques sont généralement réussis par plus de trois-quarts des élèves (de 72,4% à 97% de bonnes réponses) ;
- ***au 15ème rang*** pour le sous domaine « Quantité » *(en étant non significativement différent des pays classés entre le 9ème et le 20ème rang).* Dans ce sous domaine, il apparaît que les élèves français disposent de réelles compétences sur le thème de la proportionnalité. Cette notion est, en effet, travaillée en France dès l'école primaire, et réinvestie régulièrement par la suite, d'où les résultats plus qu'honorables, lors des exercices s'y référant ;
- ***au 13ème rang*** pour le sous domaine « Espace et formes » *(en étant non significativement différent des pays classés entre le 10ème et le 17ème rang).* Dans ce sous domaine, il ne s'agit pas, à proprement parler, d'exercices de géométrie tels que ceux travaillés en France. Les tâches demandées aux élèves consistent davantage à interpréter des représentations qu'à véritablement raisonner sur des figures géométriques ;
- ***au 16èmerang*** pour le sous domaine « Incertitude » *(en étant non significativement différent des pays classés entre le 10ème et le 17ème rang).* Dans ce dernier sous-domaine, les élèves français sont parmi les plus performants, en ce qui concerne la lecture de représentations graphiques de données statistiques. Cependant, il est à remarquer que si la question nécessite d'élaborer une stratégie ou d'effectuer un calcul, les performances chutent. De même, lorsque l'énoncé est complexe (texte long, vocabulaire spécifique non connu des élèves…).

[41] Cela est récurrent dans les différentes évaluations internationales en mathématiques mais reste, semble-t-il, mal expliqué.

Il ressort les points forts et les points faibles suivants de nos élèves français :

Points forts des élèves français	**Points faibles des élèves français**
Domaine : variations et relations (score moyen 520) Compétences acquises : ✓ appliquer une formule ; ✓ reconnaître et utiliser la proportionnalité dans une situation ; ✓ lire et extraire des informations de graphiques complexes ; dégager des informations dans différents contextes : textes, graphiques, tableaux de données (cette compétence très utile est aussi travaillée dans d'autres disciplines d'enseignement).	Domaine : incertitude (score moyen 506) Compétences manquantes: ✓ généraliser un résultat et trouver une formule algébrique qui décrit une situation ; ✓ prendre des initiatives ; ✓ utiliser une méthode par « essais-erreurs ».

Au-delà de ces résultats très globaux, il est intéressant d'aller étudier les items de plus près. En effet, les exercices de PISA semblent privilégier certainement davantage les élèves qui ont acquis des compétences sur des situations mathématiques variées, liées plus ou moins à la vie courante, par rapport à ceux qui ont l'habitude de résoudre des exercices scolaires faisant appel aux concepts et à des démonstrations hypothético-déductives du cours de mathématiques.
Par ailleurs, les exercices de PISA 2003 avec questionnaires à choix multiples (QCM) ou tests « vrai-faux » ne sont pas bien réussis par les élèves français : une des raisons possibles est, sans doute, leur faible utilisation en évaluation. Il en est de même, pour les exercices où interviennent des méthodes de dénombrement ou des études de situations aléatoires qui ne figurent pas dans les programmes français du collège[42].
D'autre part, les exercices qui demandent des interprétations, des analyses critiques de documents, des réponses multiples, des formulations de conjectures, des essais, des initiatives, présentent un taux de non réponse très élevé. Ce qui montre que ces exercices désorientent nos élèves qui ont surtout peur de « faire faux » et donc préfèrent ne pas répondre.

3. Une étude particulière de certains items

Ainsi, si on regarde de plus près certains items, à travers les compétences mises en jeu, les difficultés liées au texte, à la présentation des questions, les performances comparées de nos élèves et les productions écrites d'élèves à travers les traces laissées sur certains cahiers, on peut s'interroger sur notre enseignement à la résolution de problèmes à l'école, puis au collège.

---

[42] On peut noter cependant que dans certaines revues professionnelles et à la suite d'expériences IREM, il était préconisé d'introduire des exercices de cette nature au collège. Et désormais, une initiation aux probabilités sera enseignée en classe de troisième du Collège.

J'ai choisi, pour la suite de cet exposé, de me pencher plus particulièrement sur le champ « Quantité »[43].
Ce champ présente des taux de réussite disparates allant de 22,1% à 89,5%. Il est composé d'items relevant d'un travail sur les nombres entiers et sur les nombres décimaux (travail s'appuyant sur des comparaisons, sur la proportionnalité, sur l'application de procédés de calcul, ...) ainsi que d'items relevant de mathématiques discrètes, tels que des dénombrements.
Seuls certains items de cette évaluation sont libres de publication, les autres étant réservés pour des évaluations ultérieures. Aussi, vais-je tenter, à travers les items « libérés » de donner un éclairage sur la diversité des résultats obtenus et des comportements adoptés par les élèves français.

✓ ***Comportements d'élèves face à des situations présentant des similitudes***

Considérons les deux situations suivantes :

Question 1 : CHOIX	**Question 2 : SKATE**
Dans une pizzeria, la pizza de base comporte deux garnitures : du fromage et des tomates. Vous pouvez y ajouter des garnitures **supplémentaires**, à choisir parmi les quatre garnitures suivantes : olives, jambon, champignons et salami. Thierry veut commander une pizza avec deux garnitures **supplémentaires différentes**. Entre combien de combinaisons différentes Thierry peut-il choisir ? Réponse : ……..combinaisons.	Le magasin propose trois types de planche différents, deux jeux de roulettes différents et deux jeux d'accessoires différents. Il n'y a qu'un seul choix possible pour le jeu d'axes. Combien de skates différents Éric peut-il monter ? A 6 B 8 C 10 D 12

Et les résultats :

Question 1 : CHOIX	**Question 2 : SKATE**
Taux de réussite France : **59 %** ($3^{ème}$ rang sur 30 pays) **Taux de réussite moyen de l'OCDE : 48,8%**	Taux de réussite France : **46,5%** ($15^{ème}$ rang sur 30 pays) **Taux de réussite moyen de l'OCDE : 45,5%**

Ces items font appel, tous les deux, à l'organisation et à la structuration logique de données. Leur résolution peut reposer sur la construction d'une arborescence. Le dénombrement n'étant pas une procédure routinière pour nos élèves de troisième et de seconde, nous allons nous intéresser aux méthodes employées par les élèves et tenter de donner des explications sur cette différence de réussite.

[43] Une analyse plus complète des autres champs est parue dans le n°180 de mars 2007 de « les dossiers » Enseignement scolaire de la DEPP, intitulé « L'évaluation internationale PISA 2003 : compétences des élèves français en mathématiques, compréhension de l'écrit et sciences ».

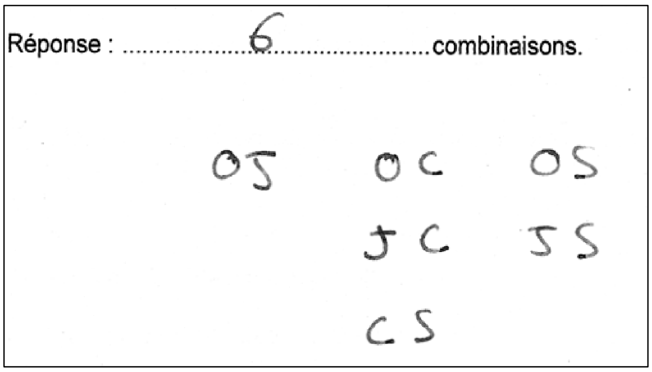
Pour l'exercice « **Choix** », les élèves avaient une place importante dans le cahier pour effectuer des recherches. En ce qui concerne la seconde question de l'exercice « **Skate** », la présentation était tout à fait différente : d'une part, l'élève ne disposait pas de place pour faire ses recherches, d'autre part, la réponse devait être choisie parmi plusieurs proposées (QCM). On peut penser que ces deux aspects engagent moins les élèves à la construction d'un raisonnement : ceci est tout à fait corroboré par l'examen d'un échantillon aléatoire de cahiers dans lequel aucune trace de recherches n'a été trouvée. L'influence du type de questionnement sur la réussite des élèves français semble être sensible. Cependant, il ne faut pas non plus négliger le fait que, pour cette question de l'exercice « **Skate** », l'arborescence est plus complexe à construire que dans l'exercice « **Choix** ».

Exemples et analyses de productions d'élèves

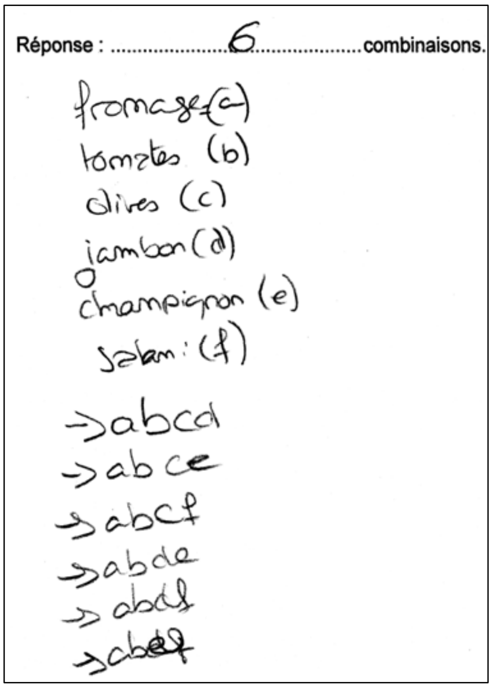
Environ 10% des élèves qui ont répondu à l'exercice « **Choix** », ont fait apparaître des traces de leurs méthodes et recherches, parmi lesquelles on peut identifier :

- des stratégies correctes :
    - *une « écriture » de toutes les combinaisons possibles (sous des formes variées), avec dans certains cas des réponses incorrectes* :

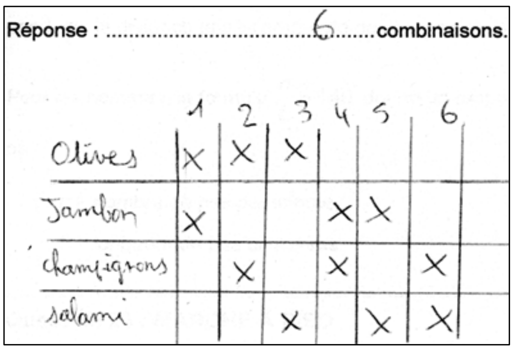
élève A



élève B



élève C

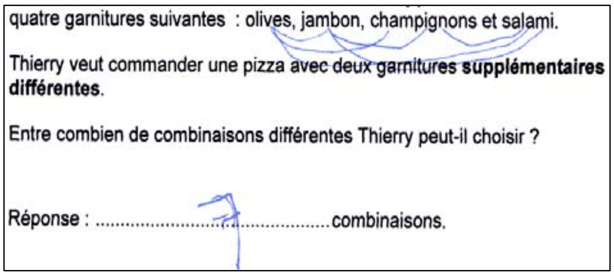


Réponse : ....6.......combinaisons.

	1	2	3	4	5	6
Olives	X	X	X			
Jambon	X			X	X	
champignons		X		X		X
salami			X		X	X

- *la construction d'un schéma* :

élève D

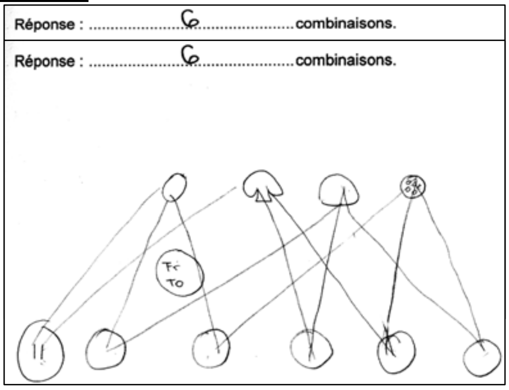

quatre garnitures suivantes : olives, jambon, champignons et salami.

Thierry veut commander une pizza avec deux garnitures **supplémentaires différentes**.

Entre combien de combinaisons différentes Thierry peut-il choisir ?

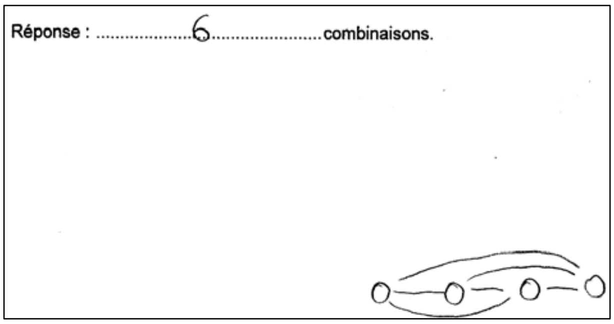
Réponse : ....7.................combinaisons.

élève E


Réponse : ....6....................combinaisons.

Réponse : ....6....................combinaisons.

élève F


Réponse : ....6......................combinaisons.

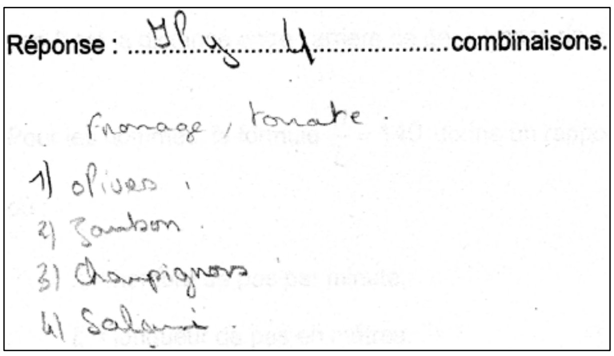
- *Gestion mentale des combinaisons* :

élève G

Réponse : 3+2+1 = ...6........................combinaisons.

➢ des stratégies incorrectes :
Parmi les réponses erronées, les plus fréquentes sont « 4 combinaisons » (près de 10%) et « 12 combinaisons » (pour 7% des élèves).
Au regard des productions ci-dessous, la réponse 4 provient très certainement d'élèves qui ont omis que la pizza commandée devait contenir deux garnitures supplémentaires. Quant à la réponse « 12 », les élèves ont, manifestement, bien pris en compte les deux garnitures supplémentaires mais n'ont pas « éliminé » les combinaisons identiques.

élève H


Réponse : ...Il y......4.....................combinaisons.

fromage / tomate.

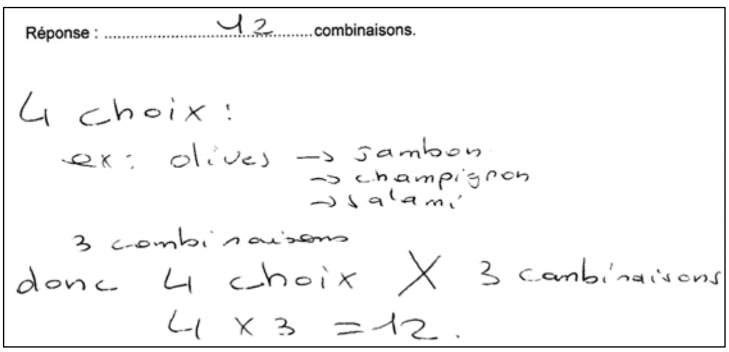
1) olives,

2) Jambon.

3) Champignons

4) Salami.

élève I


Réponse : ....12........combinaisons.

4 choix :

ex : olives → Jambon
→ champignon
→ salami

3 combinaisons

donc 4 choix X 3 combinaisons

4 X 3 = 12.

Dans l'exercice « **Skate** », il est également intéressant d'observer les réponses erronées choisies par les élèves :

- environ un quart des élèves ont choisi la réponse « 6 », qui est probablement issue de l'opération « 3×2 » qui correspond au nombre de combinaisons possibles avec 3 sortes de planches et 2 sortes de jeux de roulettes (omission des jeux d'accessoires). De plus, cette réponse « 6 » est la première proposée, ce qui a pu inciter certains élèves à ne pas remettre en cause leur raisonnement erroné ;
- près d'un élève sur 5 ont considéré que l'on pouvait monter « 8 » skates différents. Les élèves ont très vraisemblablement additionné le nombre d'éléments différents de chaque sorte : « 3 + 2 + 2 + 1 ».

Comme cela a déjà été souligné, le dénombrement n'est pas habituel pour un élève français de 15 ans, bien que ces procédures aient été initiées à l'école élémentaire dans la construction des nombres entiers et que les élèves peuvent y avoir recours lors de la résolution de situations-problèmes. Il faut, sans doute, insister sur le fait que ces procédures utilisées à l'école ne sont pas instituées comme méthodes de résolution de problèmes, ni à l'école, ni au collège, sinon elles feraient partie de la « culture » de l'élève. Ainsi, la schématisation a tendance à disparaître au collège car on y privilégie trop souvent l'algébrisation du problème. Elle ne reviendra qu'en première ou terminale lors de la résolution de problèmes de dénombrement dont on vient de parler justement !

✓ ***Des compétences certaines en proportionnalité***

Considérons la situation suivante :

TAUX DE CHANGE

Mademoiselle Mei-Ling, de Singapour, prépare un séjour de 3 mois en Afrique du Sud dans le cadre d'un échange d'étudiants. Elle doit changer des dollars de Singapour (SGD) en rands sud-africains (ZAR).

Question 1 : TAUX DE CHANGE
Mei-Ling a appris que le taux de change entre le dollar de Singapour et le rand sud-africain est de :
1 SGD = 4,2 ZAR.
Mei-Ling a changé 3 000 dollars de Singapour en rands sud-africains à ce taux de change.
Combien Mei-Ling a-t-elle reçu de rands sud-africains ?
Réponse : ……………………………………………

Question 2 : TAUX DE CHANGE
Lorsque Mei-Ling rentre à Singapour après 3 mois, il lui reste 3 900 ZAR. Elle les reconvertit en dollars de Singapour, constatant que le taux de change a évolué et est à présent de : 1 SGD = 4,0 ZAR.
Combien Mei-Ling reçoit-elle de dollars de Singapour ?
Réponse : ……………………………………………

Question 3 : TAUX DE CHANGE
Au cours de ces trois mois, le taux de change a évolué et est passé de 4,2 à 4,0 ZAR pour un SGD.
Est-il plus avantageux pour Mei-Ling que le taux de change soit de 4,0 ZAR au lieu de 4,2 ZAR, lorsqu'elle reconvertit ses rands sud-africains en dollars de Singapour ? Donnez une explication pour justifier votre réponse.

Les résultats obtenus :

Question 1 : TAUX DE CHANGE Taux de réussite France : 89,1% (2ème rang sur 30 pays)	**Taux de réussite moyen de l'OCDE : 79,7%**
Question 2 : TAUX DE CHANGE Taux de réussite France : 84,9% (3ème rang sur 30 pays)	**Taux de réussite moyen de l'OCDE : 73,9%**
Question 3 : TAUX DE CHANGE Taux de réussite France : 50,9% (5ème rang sur 30 pays)	**Taux de réussite moyen de l'OCDE : 40,3%**

A travers cet exercice, il apparaît clairement que les élèves français disposent de réelles compétences sur le thème de la proportionnalité. Cette notion est travaillée et réinvestie régulièrement en France, d'où les résultats plus qu'honorables dans les questions 1 et 2 de cet exercice. Il faut aussi préciser que, malgré l'emploi d'unités monétaires virtuelles, les situations en lien avec l'argent sont familières aux élèves.

Cependant, dès que l'usage de la proportionnalité n'est plus aussi direct ou appliqué à des situations plus complexes, les résultats sont en deçà.
C'est le cas de la troisième question de cet exercice, qui outre la demande d'une explication justifiée, nécessitait d'identifier un élément probant ou de mettre en place un calcul pour tirer une conclusion.

Pour cette question, l'obtention d'un crédit complet était subordonné à une réponse « Oui » argumentée, par exemple:

- en s'appuyant sur les différents montants obtenus et en les comparant :

Lorsqu'un SGD vaut 4,0 ZAR.

$\frac{3900 \times 1}{4,0} = 975$ SGD

Mei-Ling resoit 975 dollars de Singapour (SGD)

Lorsqu'un SGD vaut 4,2 ZAR

$\frac{3900 \times 1}{4,2} \simeq 928,6$ SGD.

Mei-Ling resoit environ 928,6 dollars de Singapour (SGD).

$975 > 928,6$

Il est donc plus avantageux pour Mei-Ling que le taux de change soit de 4,0 ZAR (rands sud-africains).

- en précisant que lorsque l’on divise par 4,2 le résultat est inférieur à celui obtenu lorsque l’on divise par 4 :

> Il est plus avantageux que le taux soit de 4,0 ZAR car pour effectué ce change, le dénominateur sera ce taux et par conséquent, plus le dénominateur est faible, plus le résultat est élevé donc plus elle recuperera de dollars.

- en indiquant qu’un dollar de Singapour coûte 0,2 rand sud-africains de moins :

> Oui c' est plus avantageux pour elle car au lieu d' être divisés par 4,2 c'est rands sont divisés par 4,0, elle a donc un bénéfice de 0,2 ZAR par rapport au premier taux de change.

Près d’un tiers des élèves ont fourni d’autres réponses (« oui » sans explication ou avec une explication incorrecte ; « non » et toutes autres réponses). Quelques réponses « non » avec un raisonnement tout à fait correct montrent que l’expression « <u>Est-il plus avantageux</u> ? » a été mal comprise.
Parmi les exercices présentés dans cet exposé, cette dernière question présente le plus fort taux de non réponse. Il faut bien être conscient que, outre les problèmes liés à la difficulté d’expression, transposer un calcul, l’interpréter dans un autre contexte, argumenter une réponse reste une réelle difficulté pour nos élèves

> Non, ce n' est pas du tout avantageux pour elle car lors de sa reconverssion de ses rands Sud-Africains en dollars de Singapour elle perd de l'argent car pour converti il faut diviser et plus on divise un nombre par un grand nombre et plus le résultat diminue.
>
> Exemple :
>
> 3900 : 4,0 = 975
>
> 3900 : 4,2 = 928,5

Conclusion : changer l’organisation du temps pédagogique

Avant de dresser toutes conclusions ou de lancer toutes hypothèses, il est bon de souligner, dans un premier temps, l’importance du facteur temps dans cette évaluation. Les élèves avaient, en effet, à répondre à une soixantaine de questions en deux heures avec, dans certains cas, les trois domaines évalués dans le même cahier. Nos élèves ne sont pas habitués à cette juxtaposition au sein d’une même évaluation et elle nécessite des changements de posture de la part de l’élève. La densité des questions, dont certaines demandaient des justifications pointues, peut aussi expliquer que certaines questions n’aient pas été traitées.
Mais ces arguments n’expliquent pas à eux seuls certains taux de non réponse ou de réponses erronées élevés.

Il est nécessaire de souligner que la majorité des situations proposées dans cet exposé (à l’exception de l’exercice « Taux de change »), inhabituelles en séquence d’évaluation, valorisent les recherches et les prises d'initiative. Est-ce réellement le cas dans notre enseignement ? Or, ne retrouve-t-on pas cela dans les compétences du socle commun de connaissances et de compétences ? N'est-ce pas ce que l'on voudrait pour chaque citoyen ?

Il faut aussi reconnaître que, « coincé » par le temps, le professeur se contraint souvent à limiter le temps de recherche pour pouvoir tenir les objectifs qu'il s'est fixés. L'obligation de « boucler » le Programme, peut inciter même certains enseignants à ne jamais proposer ce genre de situation.

Pourtant, les élèves français de 15 ans montrent, si on les sollicite, qu'ils disposent de procédures leur permettant de résoudre des problèmes pour lesquels ils n'ont pas de solution experte mathématique. Il semble donc nécessaire de proposer des situations variées, ouvertes, qui ne contribuent pas à un formatage du questionnement et des raisonnements.

Je voudrais donc plaider ici pour une refondation du temps pédagogique de l'enseignement des mathématiques. Je reprendrai une formule de Philippe Perrenoud, éminent chercheur de la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation de l'Université de Genève (faculté créée par Jean Piaget), formule, disais-je, que Philippe Perrenoud nous a livrée à Blois en septembre 2007 lors du séminaire des corps d'inspection de l'académie d'Orléans-Tours.

Voici « La » formule :

un tiers du temps pour les activités ouvertes de recherche,
un tiers du temps pour établir les savoirs,
un tiers du temps pour conforter les techniques.

Il est clair dans mon esprit (et dans celui de Philippe Perrenoud, d'ailleurs) que ces trois temps ne sont pas disjoints. Mais il est important pour les élèves qu'ils soient bien identifiés.

En effet, un savoir non institué est un savoir fugace qui ne sera pas identifié, ni connu et ni appris par tous. Mais, attention, un savoir ne se décrète pas, il se construit avec les élèves.

Rien ne sert de faire non plus de l'« activisme pédagogique » comme cela est proposé ou conduit à travers certains « fichiers » utilisés à l'école, qui limite l'élève a un travail à son niveau sans l'obliger à confronter les résultats ni à chercher plus loin au-delà de ses ressources propres.

Il n'y a pas de savoir sans technique. La technique fait partie de l'**Étude** : l'habitude de l'exercice fonde l'élève à ne pas perdre la technique et à pouvoir librement l'utiliser. Le travail technique permet d'assimiler et d'entraîner. Il donne des automatismes qui libère la pensée (comme le dit si bien Michèle Artigue, didacticienne en mathématiques).

Donner du temps à la recherche de problèmes, c'est donner du sens aux mathématiques, c'est développer des compétences, c'est exercer les compétences et c'est également créer une culture des différentes situations. Cette culture nécessite un investissement collectif (de la classe et du professeur) qui prend en compte tous les élèves, qui aide à comprendre le problème, à en montrer les analogies ou les différences avec les précédents. Cette culture donne de « l'expérience » aux élèves. Elle privilégie l'imagination, développe de la créativité et des méthodes de résolution : simplification, modélisation, essai-erreur, approximation, etc. Elle introduit ou accompagne de nouveaux savoirs. Elle valide des techniques. Cela nécessite un certain regard posé sur l'élève, une certaine attitude du maître qui encourage, aide, stimule, relativise l'erreur et contraint chaque élève à toujours se dépasser puis ensuite le confronte aux autres et l'aide à partager « son expérience ».

Le maître a ce rôle éminent de l'intelligence de la situation, de ses élèves et de sa classe, qui conduit à la révélation du savoir, au renforcement d'une technique, à la libération de la pensée pour la recherche. D'où, l'art d'enseigner les mathématiques est donc, j'en suis convaincu, l'art de l'organisation de la progression de l'Étude, je dirai même de la spirale de l'Étude : du choix des problèmes, des savoirs à instituer et des techniques à exercer.

C'est ce que l'on tente de faire modestement dans l'académie d'Orléans-Tours au travers de liaisons école-collège. En effet, je suis persuadé, en tant que pédagogue, que le plus important à l'école, c'est ce qui se passe dans la classe. Je vous remercie.

Brochures et articles en lien avec la conférence :

Liaison école-collège sur le site « mathématiques » de l'académie d'Orléans-Tours : HTTP://WWW.AC-ORLEANS-TOURS.FR/MATHS/SPIP.PHP?RUBRIQUE12

« L'évaluation internationale PISA 2003 : compétences des élèves français en mathématiques, compréhension de l'écrit et sciences », avec le groupe d'experts, numéro 180, mars 2007, Les Dossiers de la DEPP

« Les compétences des élèves français à l'épreuve d'une évaluation internationale, premiers résultats de l'enquête PISA 2000 », avec le groupe d'experts, numéro 137, novembre 2002, Les Dossiers de la DEP

« L'évaluation PISA », avec Claire Dupé, dans le « Bulletin Vert », numéro 439 (septembre 2002), p 241-249

« Ce que l'évaluation PISA 2003 peut nous apprendre », avec Claire Dupé, dans le « Bulletin Vert » de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), numéro 460 (septembre 2005), p 626-644

Clôture des travaux

Martine Safra, doyenne du groupe de l’enseignement primaire de l’inspection générale de l’Éducation nationale

Il me paraîtrait bien impudent de prétendre apporter une conclusion aux interventions de grande qualité que nous avons entendues au cours de ces deux journées et je m'en garderai bien. Je me risquerai néanmoins à quelques mots. Le séminaire m'a paru mettre en évidence quelques enjeux forts pour l’enseignement des mathématiques, mais aussi pour l’ensemble des enseignements de l’école.

Si je m'attarde un instant sur les mathématiques, outre les apports passionnants sur l’histoire du calcul et l’histoire de l’enseignement des maths, l’articulation entre le calcul et les problèmes est sans doute l’un des points forts sur lesquels les intervenants nous invitent à réfléchir. Ils ont mis en évidence que la résolution de problèmes n’est pas un élément à part, que la complexité ne doit pas faire l’objet d’un chapitre mais qu'elle est partie intégrante de la démarche mathématique ; mais ils ont également souligné l’aspect formateur du calcul, qui permet de s'approprier les nombres et leurs propriétés, mais aussi de retenir des résultats, d'intégrer des procédures, des stratégies.
Au-delà de ses apports précieux pour l’enseignement des mathématiques, le séminaire me paraît conduire à faire un certain nombre de parallèles avec d'autres champs disciplinaires de l’école. Je citerai quelques points particulièrement importants pour l’analyse des apprentissages et des obstacles qu'il comporte :

1. le poids des problèmes langagiers sur une résolution de problèmes, compte tenu de la nécessité pour l’élève de construire une représentation de la situation proposée ;
2. la nécessaire maîtrise des outils fondamentaux : l’impact sur les performances en résolution de problèmes de la connaissance fluide des opérations simples ne peut que faire penser à celui que peut avoir une reconnaissance réellement automatisée de la forme orthographique des mots sur la compréhension en lecture. L’économie cognitive qui en résulte me paraît de même nature ; dans l’un et l’autre cas, il y a nécessité d'automatiser des processus ; des outils bien installés libèrent la pensée.
   Il me semble qu'on en est parfois loin dans les classes : je ne prendrai pour exemple que les résultats décevants à certains exercices de l’évaluation de CM2, pourtant jugés initialement trop faciles ; la faiblesse a pu en être ensuite imputée au temps imparti, peut-être est-elle d'abord imputable à une insuffisante automatisation de certains calculs ;

3. l’importance de la culture didactique des professeurs des écoles : elle est apparue un enjeu central. Là aussi, on peut élargir cette conclusion au-delà de l’enseignement des mathématiques.

Une telle culture est nécessaire d'abord pour que les enseignants soient en mesure de définir précisément les objectifs de formation d'une situation donnée :

> Un contre exemple en classe : des CE2-CM1 sont en groupes de 3. Ils doivent répondre à la question suivante : pour écrire les numéros de page d’un livre de 72 pages, combien de fois utilise-t-on le chiffre 2 ? le chiffre 6 ? le chiffre 9 ?
>
> Le travail de groupe est particulièrement peu convaincant. Finalement c’est le maître qui passe dans les groupes, corrige les procédures erronées (on ne peut pas parler de démarche…) ; ensuite les élèves appliquent. Après la correction du « 2 », les élèves qui n’avaient pas compris, disent, pour le 6, « on a compris le système ».
>
> Interrogé sur les objectifs de formation des élèves à travers ce problème, le maître peine à trouver des réponses, et celles qu’il donne sont générales, et non disciplinaires (travailler à plusieurs, comprendre qu’il peut y avoir plusieurs solutions, vérifier l’exhaustivité des solutions…). Il faut beaucoup d’insistance pour qu’il parvienne à formuler que ce problème vise la consolidation de la numération.
>
> Si le maître n’est pas conscient des objectifs de formation des élèves à travers une résolution de problème, alors celle-ci risque d’être totalement improductive, peut-être pas pour les élèves qui « trouvent », et qui développeront des compétences malgré le professeur si l’on peut dire, mais en tous cas pour les élèves qui ne trouvent pas et auxquels l’étayage proposé par le maître sera sans intérêt didactique.

J'emprunterai sur ce point une phrase d'Alain Mercier : « L’activité de l’élève ne peut pas être un enjeu en soi ; elle doit être un enjeu pour l’enseignement, ou elle constitue un temps perdu ».
Une réelle culture didactique est également nécessaire pour analyser les compétences en jeu dans une situation donnée, pour jouer sur le niveau de complexité de chacune d'elles, ou pour cerner les situations qui permettent de déceler et réguler les difficultés d'apprentissage, pour analyser les productions des élèves et les procédures de travail adoptées.
À la question récurrente des enseignants, *comment différencier les situations d'apprentissage ?*, les interventions du séminaire ont ainsi proposé des pistes de réflexion très certainement transposables dans d'autres domaines ;

4. l’importance d'une information sur les troubles de l’apprentissage, le rôle essentiel d'une intervention intensive auprès des élèves concernés par une dyscalculie comme par une dyslexie ;

5. enfin, la question de l’articulation socle / programme mérite qu'on s'y arrête un instant.
   Les points qui ont été soulignés peuvent être repris intégralement dans d'autres domaines d'apprentissage. On ne saurait réduire les programmes au socle :
   - parce que c'est par le travail sur des situations complexes que l’on peut assurer à tous la maîtrise de situations simples ;
   - parce qu'apprendre demande du temps et qu'une compétence exigible à un palier doit le plus souvent être travaillée durant le cycle précédent ;
   - parce que dans toutes les classes, il y a des élèves qui ont soif d'apprendre.

La mise en œuvre du socle appelle une indispensable vigilance : le socle ne peut devenir le seul objectif, le seul horizon des enseignants.

Je n'ai fait évidemment que souligner quelques points sans prétendre à quelque exhaustivité que ce soit. Ces deux journées ont été d'une grande richesse. Merci à la Direction générale de l'enseignement scolaire d'avoir permis ce stage et d'avoir veillé à ce que tout se passe au mieux, merci à Jean-Louis Durpaire de sa ténacité à en construire les contenus ; merci à tous les participants, et notamment aux universitaires, aux chercheurs, aux membres des corps d'inspection du second degré, de leur présence et de leur implication dans ce séminaire.

Nous souhaitons que ce séminaire ne soit pas sans lendemains, mais s'inscrive dans une démarche globale. Il doit constituer un point de départ pour une démarche de formation continue des Inspecteurs de l'Éducation nationale (IEN). Nous souhaitons prendre appui sur lui pour élaborer un processus de formation, qui se ferait, selon les réalités de terrain au niveau académique ou inter-académique : seuls des groupes de formateurs académiques peuvent répondre à un besoin de formation ; votre présence ici nous permettra de concevoir un format de travail qui pourra ensuite être repris dans d'autres champs disciplinaires. C'est ainsi une dynamique nouvelle que nous souhaitons enclencher, direction de l'encadrement, École supérieure de l'éducation nationale (ESEN), DGESCO et inspection générale.

Merci à tous.

La régulation potentielle de l'activité : la variabilité didactique

Bernard Sarrazy

I. Un plan d'expérience appuyé sur les variables d'énoncé d'un problème

Nous avons demandé aux professeurs, de même niveau d'ancienneté dans le niveau, de rédiger (sans consulter de manuel) six problèmes d'arithmétique de difficulté très contrastée :

- trois dont la solution relève d'une addition ;
- les trois autres devant se résoudre par une soustraction.

Afin d'évaluer la variabilité des professeurs (qui, précisons-le, ne se résume pas à la capacité à produire des énoncés « difficiles »), nous avons recensé des variables dont l'effectivité sur la résolution était attestée par différents travaux (en didactique et en psychologie principalement). 14 variables ont été ainsi identifiées que nous avons regroupées en 3 catégories :

1. *numériques* regroupent les variables qui se rapportent aux valeurs numériques de l'énoncé ;
2. *rhétoriques* relatives aux formes d'organisation de l'habillage du problème ;
3. *sémantico-conceptuelles* (expression empruntée à M. Fayol, 1991, 268) ; ce dernier type regroupe à la fois des variables strictement logico-mathématiques (le type de structure additive, par exemple) et des variables liées aux liens entre certains aspects rhétoriques (la présence d'un déclencheur par exemple) et certains aspects logico-mathématiques (l'opérateur mathématique qui doit être effectivement utilisé).

A- Les variables numériques

1. Type de nombres utilisés (TN)

Nous avons retenu comme critère, non la grandeur, mais l'incidence de la taille des nombres sur les stratégies de calcul : il est, par exemple, plus facile de calculer la différence entre 120 000 et 110 000 qu'entre 136 et 68. Les 2 modalités suivantes ont été retenues pour cette variable :

- les nombres sont « grands » si l'élève est contraint d'utiliser l'algorithme classique pour calculer leur somme ou leur différence ;
- les nombres sont « petits » s'il est possible d'utiliser aussi une autre procédure (compter sur les doigts, utilisation de la procédure complément...).

2. Présence / absence de données non pertinentes

Les travaux de Arter et Clinton (1974) ou ceux de Campbell (1968) montrent que, quel que soit le niveau des élèves, la présence de données inutiles ralentit significativement la solution, même s'il est apparent qu'elles ne sont pas pertinentes.

B. Les variables rhétoriques

3. Présence / absence d'un indice sémantique dans l'énoncé (IS)
Un indice sémantique est une expression (qui peut parfois n'être qu'un seul mot) située dans l'énoncé (par exemple, « acheter », « vendre », « *x* de plus... », etc.). Ces indices peuvent avoir des effets très significatifs sur les performances des élèves en facilitant, ou, au contraire, en complexifiant, la construction de la représentation mentale du problème.

4.Thématique de l'énoncé (TF)
Le thème évoqué dans le problème est-il, ou non, familier pour les élèves ? Selon le degré de familiarité, les performances diffèrent de façon significative : les problèmes qui évoquent des situations familières sont mieux réussis que ceux qui se réfèrent à des situations non familières (Fayol, 1991 ; Ehrlich, 1990).

5. Présence / absence d'un déclencheur dans la question
Un *déclencheur* est une expression ou un mot situé dans la question qui induit, parfois à tort, un type d'opération auquel il est associé par « habitude ». Par exemple, dans la question « Combien lui *reste*-t-il de pommes ? » le déclencheur « *reste* » induit une soustraction. Dans d'autres cas, « *en tout* » induit une addition, « *chacun* » une division...

6. Organisation syntagmatique (OS) et organisation temporelle (OT)
Deux types d'organisation doivent être distingués :

- *l'organisation syntagmatique* : elle correspond à l'ordre des événements dans le texte l'énoncé ;
- *l'organisation temporelle* : correspond à l'ordre des événements tels qu'ils se sont déroulés effectivement dans la réalité.

Ces deux ordres peuvent ou non coïncider. Cette variable interagit fortement avec l'ordre opératif (c'est-à-dire l'ordre d'utilisation des données numériques dans le calcul numérique). Cette interaction permet d'expliquer les différences importantes de réussite sur un même problème. Le problème est mieux réussi si les trois types d'organisation sont identiques.

7. Place de la question
L'emplacement ou l'absence de la question à tout âge et pour tout type de problème provoque des écarts de réussite. Pour un même problème, le placement en tête de la question entraîne une augmentation des performances d'autant plus importante que les problèmes sont jugés difficiles (Fayol, Abdi, 1986 ; Fayol, 1990). Cette position facilite la construction de la représentation du problème (Richard, 1984, 1990a). Nous avons distingué trois modalités de placement de la question : 1. Au début ; 2. Au milieu ; 3. A la fin ; 4. Absence de question.

8. Vocabulaire utilisé
Les problèmes peuvent être plus ou moins faciles selon que le vocabulaire utilisé est, ou non, familier à l'élève (Ehrlich, 1985 ; Fayol, 1991).

9. Type de formulation : forme classique et forme récit

- *Dans une forme classique* : le texte est court, condensé ; les phrases sont courtes et peu complexes ; on trouve très peu d'éléments « distracteurs » ;
- *Dans une forme récit* : l'énoncé est enrichi au plan narratif et contient des informations inutiles pour la résolution.

La recherche d'informations dans une forme récit complexifie la résolution et entraîne des changements de procédures – contrairement à la forme classique, où il s'agit seulement de traiter l'information (Audigier et al., 1978). Notons que les bons lecteurs, dans le cas d'un problème type récit, vont rapidement à l'information pertinente. En général, les élèves, quel que soit leur niveau, ne prêtent que très peu d'attention à l'habillage du problème, et privilégient principalement l'information numérique (Zagar et al., 1991, 147).

C. Les variables sémantico-conceptuelles

10. Type de structure additive (TY)
Considérons les deux expressions suivantes : « *A* a 6 billes de moins que *B* » et « *A* a perdu 6 billes » ; si d'un point de vue algébrique, elles sont équivalentes, d'un point de vue sémantico-conceptuel, elles ne le sont pas. Ces difficultés ne sont pas dues au seul calcul numérique, mais à ce que Vergnaud appelle « calcul relationnel » (Vergnaud, 1981) c'est-à-dire au traitement des relations entre les données numériques de l'énoncé. Vergnaud (*id.*) distingue 6 catégories de relations additives sur la base de trois concepts (la mesure ; les transformations temporelles ; les relations statiques) que nous ne détaillerons pas ici. Signalons toutefois que ces différents types de problèmes sont très loin d'être également réussis par des élèves de 10 ans ; il s'agira donc d'observer si cette dimension est, ou non, utilisée par les maîtres afin de produire des énoncés de difficulté contrastée.

11. Nature de l'inconnue (NI)
Quel que soit l'âge des élèves, les problèmes portant sur l'état final sont mieux réussis que lorsqu'ils portent sur l'état initial ; cette variable serait un des facteurs de difficulté des plus importants (Fayol, 1990, 1991).

12. Correspondance entre l'ordre syntagmatique (OS) et l'ordre opératif (OP)
De la même façon que nous l'avons fait pour l'organisation syntagmatique et l'organisation temporelle, nous distinguerons ici deux types d'organisation :

- *l'ordre opératif* correspond à l'ordre de l'utilisation des données dans le calcul numérique ;
- *l'organisation syntagmatique* correspond à l'ordre d'apparition des données numériques dans l'énoncé ;

Le problème est plus facile dans le cas où ces deux ordres coïncident.

13. Correspondance entre le déclencheur (DE) et l'opérateur mathématique (M)
Rappelons que le déclencheur est une unité sémantique de la question qui peut induire un type d'opération. Nous appelons « opérateur mathématique » le type d'opération nécessité par le problème. Deux cas peuvent donc se présenter :
soit ils sont identiques (« + » « + », « - »,« - »), soit différents (« - » « + », « + » « - »).

14. Correspondance entre l'indice sémantique (IS) et l'opérateur mathématique (M)
De la même façon que pour la variable précédente, nous observerons si l'indice sémantique correspond ou non à l'opérateur mathématique.

II. Résultats et commentaires

Mode de calcul

Pour calculer l'indice de variété pour les problèmes additifs (*IVa*), nous avons comptabilisé, pour chacune des 14 variables, le nombre de variations observées (*Vo*) sur l'ensemble des 3 problèmes, rapporté au nombre de variations possibles[44] (*Vp*) *(IVa = Vo/Vp*).

La même procédure de calcul a été reconduite, pour l'indice de variété, pour les problèmes soustractifs (IVs). Compte tenu de la forte corrélation entre ces 2 indices ($r = .81$; s. ; $p. < .01$), nous avons retenu comme indice de variété leur moyenne arithmétique.

Validité empirique de l'indice

Les 42 problèmes ont été ensuite soumis à 27 élèves de 8-9 ans. Nous avons observé une forte corrélation ($r = .97$; s. ; $p. < .001$) entre la moyenne des réussites sur les problèmes réalisés par les élèves et l'indice de variété calculé sur ces mêmes problèmes. On peut donc affirmer que plus l'indice de variété est élevé, plus les problèmes sont difficiles (et inversement).

Variabilité et sensibilité

La corrélation observée entre les valeurs de l'indice de variété des 7 maîtres et les scores moyens de sensibilité pour chaque niveau scolaire ne permet pas de démentir notre hypothèse initiale : quel que soit le niveau scolaire des élèves, la variabilité des professeurs a un effet significatif sur la sensibilité au contrat des élèves (Bons élèves : $r = -.79$; $p. < .02$; Élèves moyens : $r = -.55$; $p. < .20$; Élèves faibles : $r = -.60$; $p. < .10$; sur l'ensemble : $r = -.74$; $p. <. 05$).

III. Conclusion

Plus un maître possède une variabilité importante, plus il y a de chances que les élèves fassent preuve de flexibilité dans la résolution ; inversement, *plus la variabilité du professeur est faible, plus la probabilité que les élèves se fient davantage aux aspects formels de l'énoncé qu'à sa « compréhension »* est élevée.

Un enseignement répétitif peut plus facilement conduire les élèves à s'adapter aux situations d'enseignement par le seul repérage d'indices (les déclencheurs par exemple) pour répondre aux situations ; les élèves peuvent ainsi adopter un comportement approprié sans avoir besoin de « comprendre » le sens des connaissances mathématiques mobilisées dans cette situation – puisque la situation ne l'exige pas, pourquoi en serait-il autrement ?

Une variabilité élevée invalide ces stratégies et introduit l'élève dans un autre contrat. L'élève ne peut plus, en effet, se fier à ces seuls indices de surface, et corrélativement, l'engagement de l'élève est plus probable car plus conforme aux usages qui ont cours dans ces institutions. Comme le remarque Bru (1991, 136) à propos de l'enseignement de la lecture-écriture au cours préparatoire, lorsque la variété est effective, la simulation devient plus difficile et corrélativement, l'engagement des élèves est plus probable. L'exercice du métier d'élève s'en trouve alors modifié et l'attention s'en trouve renforcée. Ce résultat s'accorde avec le modèle théorique précédemment énoncé : la variabilité apparaît comme une dimension de l'action du professeur pouvant contribuer à expliquer les différences interclasses de sensibilité au contrat didactique que nous avons mises en évidence plus haut.

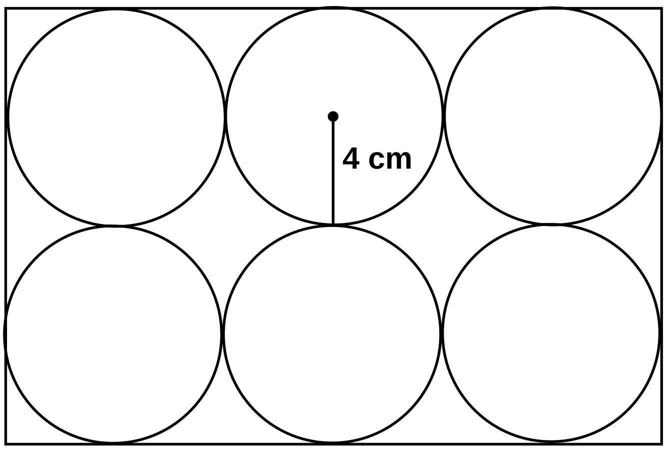
[44] En effet, la seule somme des variations (*Vo*) conduirait à sous-estimer la valeur de l'indice dans le cas où certaines variations sont formellement exclues par les choix réalisés sur d'autres variables – par exemple, si sur l'ensemble des trois énoncés additifs, n'apparaît qu'un seul déclencheur (*DE*), alors aucune variation n'est possible sur la variable *DE/M* (correspondance entre le déclencheur et l'opérateur mathématique).

Exemples d’exercices

Rémy Jost

Évaluation « B » en classe 4 (CM1)	Commentaires :
Laske allekkain (calcule en posant les opérations) 2 353 + 9 865 – 7 897 60 020 – 623 • 84 (4 pts sur 28) **note : l’évaluation « B » est prévue pour les élèves non prêts à l’évaluation « A »*	Le calcul posé est systématiquement proposé sans l’aide d’une calculatrice. Les règles de priorités opératoires sont apprises.

<table>
<tr><th>Évaluation « B » en classe 4 (CM1)</th><th>Commentaires :</th></tr>
<tr><td>



Kuinka pitkä on suorakulmion

Quelle est la longueur

a) Lyhyempi sivu ? - *des côtés du rectangle ?*

____

b) Piri ? - *du périmètre ?*

____

</td><td>

La prise d’information est complexe.
Les données ne sont pas toutes explicitées et c’est l’élève qui les infère (ce sont des cercles, ils sont tangents, de même rayon, …).
On ne demande pas de justifier ; seule la réponse exacte ici est attendue ; pourtant il y a un raisonnement, il est implicite.

</td></tr>
</table>

Évaluation « B » en classe 4 (CM1)	Commentaires :
	Les questions sont ouvertes Plusieurs réponses sont possibles La question b) n'est pas facile

Piirrä

a) suorakulmainen kolmio, jossa on kaksi 4 cm pitkää sivua

b) nelikulmio, josa on 2 tylppää kulmaa ja 2 terävää kulmaa

Dessine :

a) un triangle ayant deux côtés de 4 cm

b) un quadrilatère ayant 2 angles obtus et 2 angles aigus.

En formation en classe 3 (8-9 ans, soit CE2)	Commentaires :
…• 3 = 9 …• 3 = 15 …• 3 = 12 …• 3 = 6 …• *3 = 18*	Les tables de multiplication sont travaillées dans tous les sens et préparent la division. On n'hésite pas à entraîner les élèves à l'oral et à l'écrit sur des exercices d'automatisation.

livre de ***classe 3 (CE2) questions 2 et 3 :*** Annie, Kaisa et Lotta se partagent « également » la somme suivante. Combien reçoivent-elles chacune ?


Kotitehtäviä sivuille 58 – 59


Anni, Kaisa ja Lotta jakavat rahat tasan. Kuinka paljon kukin saa?

2.

Vastaus:

3.

Vastaus:

Commentaires :

C’est une situation concrète.

La prise d’information est « complexe ». Les données ne sont pas écrites, c’est à l’élève de les « trouver ».

Il s’agit de reconnaître des billets de 5 euros et des pièces de 2 euros et de lire la question, de la comprendre, de trouver un modèle qui convienne, de le mettre en œuvre, puis de trouver la réponse.

On retrouve les quatre types de compétences du livret d’évaluation du socle dans le pilier 3 sur la résolution de problèmes :

1. rechercher, extraire et organiser l’information utile ;
2. raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale ;
3. réaliser, manipuler, mesurer, calculer, appliquer ;
4. présenter les résultats obtenus.

Ici, une seule question met en œuvre quatre compétences.

Il n’y a pas de questions intermédiaires.

Objectifs généraux d'enseignement et critères d'évaluation dans une école de Finlande

Rémy Jost

Classes 3 à 5 (équivalent du CE2 au CM2 en France)

Les principaux objectifs de l'enseignement des mathématiques dans les classes 3 à 5 sont le développement de la réflexion mathématique, la création des bases nécessaires à l'apprentissage des modèles de réflexion mathématique, la consolidation de la notion de nombre et des techniques de calcul usuelles et l'acquisition d'expériences qui serviront à créer une base à l'apprentissage des notions et des structures mathématiques.

Objectifs généraux d'enseignement

L'élève

- *est placé en situation de réussite au cours des activités mathématiques ;*
- *apprend en expérimentant et en observant ;*
- *apprend à utiliser les notions étudiées ;*
- *apprend les techniques usuelles de calcul et à résoudre des situations mathématiques ;*
- *trouve des similitudes, des différences, des régularités et des relations de cause à effet dans l'étude des phénomènes mathématiques ;*
- *sait justifier ses conclusions et présenter ses solutions aux autres élèves ;*
- *apprend à poser des questions et à tirer des conclusions de ses observations ;*
- *apprend à utiliser des règles et à suivre des conseils ;*
- *apprend à se concentrer de manière durable dans son travail, et à travailler au sein d'un groupe.*

Critères d'évaluation pour obtenir la note minimum « acceptable » (extrait des compétences et connaissances exigées)

Classe 3 soit fin CE2

L'élève

- *sait résoudre des problèmes mathématiques simples et expliquer sa démarche de manière raisonnée ;*
- *sait comparer et classer des situations concrètes, avec l'aide de l'enseignant ;*
- *peut réinvestir les conseils prodigués.*

Nombres et opérations - algèbre

L'élève

- *sait décomposer les nombres de 1 à 20 ;*
- *sait lire, comparer et ranger les nombres de 1 à 1000 ;*
- *sait résoudre des additions et des soustractions, ainsi que des multiplications simples ;*
- *sait résoudre des divisions simples dans des situations concrètes ;*
- *sait présenter des fractions simples dans des situations concrètes.*

Géométrie

L'élève

- *sait reconnaître des figures planes (cercle, triangle, quadrilatère) et les notions géométriques de base (point, ligne et angle) ;*
- *sait reproduire une figure simple par agrandissement sur un quadrillage ;*
- *comprend la notion de mesure, sait utiliser des outils pour mesurer, sait exprimer une mesure en utilisant les unités usuelles.*

Informatique, statistiques et probabilités

L'élève

- *sait lire des tableaux et des graphiques simples, avec l'aide de l'enseignant.*

Classe 4, soit fin de CM1 :

L'élève

- *sait résoudre des problèmes mathématiques simples et expliquer sa démarche de manière raisonnée ;*
- *sait comparer et classer des situations concrètes ;*
- *sait reproduire des situations concrètes sous forme mathématique, avec l'aide de l'enseignant ;*
- *sait classer, regrouper selon un critère donné, mettre en évidence une propriété commune ;*
- *est capable d'interpréter un texte, un croquis ou un événement simples ;*
- *peut travailler au sein d'un groupe.*

Nombres et opérations - algèbre

L'élève

- *comprend le système de numération décimale et sait décomposer des nombres en unités, dizaines, centaines, unités de mille… ;*
- *maîtrise les techniques opératoires de l'addition, de la soustraction et de la multiplication en utilisant la disposition usuelle et mentalement ;*
- *sait écrire une suite d'opérations simples et en trouver le résultat.*

Géométrie

L'élève

- *comprend la notion de périmètre et d'aire et sait les calculer dans le cas de figures simples (rectangle) ;*
- *sait utiliser, comparer des mesures ; exprimer une mesure dans différentes unités usuelles (m, cm, km).*

Informatique, statistiques et probabilités

L'élève

- *sait présenter des informations sous forme de graphique ;*
- *sait lire des tableaux et des graphiques et en retirer des informations avec l'aide de l'enseignant.*

Classe 5 soit fin de CM2 :

L'élève

- *sait résoudre des problèmes mathématiques simples et expliquer sa démarche de manière raisonnée ;*
- *sait comparer et classer des situations concrètes ;*
- *sait analyser des situations concrètes sous forme mathématique ;*
- *sait classer, regrouper selon un critère donné, mettre en évidence une propriété commune ;*
- *est capable d'interpréter un texte, un croquis ou un événement simples ;*
- *peut travailler au sein d'un groupe.*

Nombres et opérations - algèbre

L'élève

- *comprend le système de numération décimale, sait l'utiliser ;*
- *maîtrise les techniques opératoires de l'addition, de la soustraction et de la multiplication en utilisant la disposition usuelle et mentalement ;*
- *sait écrire une suite d'opérations simples et en trouver le résultat ;*
- *maîtrise l'addition et la soustraction des nombres décimaux ;*
- *comprend les notions de fraction, de nombre décimal et de pourcentage ;*
- *comprend la notion de divisibilité et connaît quelques règles de divisibilité.*

Géométrie

L'élève

- *sait comparer et classer des angles et des polygones ;*
- *comprend la notion d'échelle ;*
- *sait estimer une mesure, utiliser, comparer des mesures, exprimer une mesure dans différentes unités usuelles (m, cm, km).*

Informatique, statistiques et probabilités

L'élève

- *sait collecter et présenter des informations sous forme de graphique ;*
- *sait lire des tableaux et des graphiques et en retirer des informations avec l'aide de l'enseignant.*

Classe 6 soit fin de 6e :

L’élève
- *trouve des éléments essentiels dans la situation présentée, avec l’aide de l’enseignant et sait les présenter sous des formes différentes (texte, schéma, …), anticipe la solution et son ordre de grandeur éventuel ;*
- *peut travailler au sein d’un groupe.*

Nombres et opérations

L’élève
- *maîtrise les techniques opératoires de l’addition, de la soustraction et de la multiplication en utilisant la disposition usuelle et mentalement ;*
- *sait simplifier et trouver une fraction équivalente ;*
- *maîtrise la notion de pourcentage ;*
- *maîtrise le calcul sur le temps et les durées.*

Géométrie

L’élève
- *sait classer les polygones réguliers ;*
- *sait calculer le périmètre et l’aire de figures planes régulières avec l’aide de l’enseignant ;*
- *sait reproduire une figure par symétrie par rapport à un axe ou à un point.*

Probabilités et statistiques

L’élève
- *sait chercher l’information dans les tableaux et les graphiques.*